第 3 卷◆第 12 期◆版本 1.0◆2020 年
文章类型：论文|刊号（ISSN）：2630-4686 /（中图刊号）：380GL020

三种常用积分与网的收敛

房琦贵
宁夏师范学院　数学与计算机科学学院
DOI:10.12238/er.v3i12.3435

[摘　要] 构造一个网收敛到在$[a,b]$上Riemann可积函数$f(x)$的定积分$\int_a^b f(x)dx$,再构造两个网分别收敛到在$E(\subseteq R^n)$上两种常用Lebesgue可积函数$f(x)$的两种常用Lebesgue积分$\int_E f(x)dx$。

[关键词] Riemann积分；Lebesgue积分；网的收敛
中图分类号：O175　**文献标识码：**A

Riemann积分、Lebesgue积分所用的极限只是网的收敛[4][5]概念的一个特例,本文用更广泛的收敛去构造三个网分别收敛三个常用积分上,为此给出所需要的基本概念。

定义1　设$(D,\le)$是偏序集满足：$\forall d_1,d_2\in D$都$\exists d_3\in D$，使得$d_1,d_2\le d_3$.则称偏序集$(D,\le)$是一个定向集。

定义2　设$(D,\le)$是一个定向集,(X,τ)是一个拓扑空间.称映射：$\xi:D\to X$为上的一个网.记

$$\xi_d=\xi(d),\quad \xi=(\xi_d)_{d\in D}$$

定义3　设ξ是拓扑空间(X,τ)内的一个网，$p\in X$.若$\forall V_p(\in N_\tau(p))$，都$\exists d_0\in D$使得$\xi_d\in V_p$

$(\forall d(\in D),\ d_0\le d)$,则称$p$是网$\xi$在拓扑空间$(X,\tau)$上的一个极限,记$\xi\to p$.记

$$\lim_\tau \xi=\{p\,|\,\xi\to p\}.$$

1 构造一个网收敛到Riemann积分$\int_a^b f(x)dx$

定理1 设函数$f(x)$在$[a,b]$上Riemann可积[1],则存在(R^1,τ_d)内的网ξ,使得

$$\lim_{\tau_d}\xi=\left\{\int_a^b f(x)dx\right\}.$$

证明：

1.1记D表示$[a,b]$上的一个分割,记$T(D)$表示$[a,b]$上的分割集,D_1，D_2表示$[a,b]$上的一个分割,令D_1的分点是D_2的分点$\Leftrightarrow D_1\le D_2$.

$\forall D_1,D_2\in T(D)$，$\exists D_0\in T(D)$是比D_1，D_2更细的分割，即$D_i\le D_0(i=1,2)$,则偏序$(T(D),\le)$是定向集；

1.2设
$$\xi:T(D)\to R^1,D\mapsto \xi_D=\sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x_i$$
是(R^1,τ_d)内的一个网.

记
$$\alpha=\lim_{|T|\to 0^+}\xi_D=\int_a^b f(x)dx=\inf\left\{S_D^{大}\middle|D\in T(D)\right\}=\sup\left\{S_D^{小}\middle|D\in T(D)\right\}$$ [1],

(其中$S_{D_1}^{大}$表示分划D的大和，$S_D^{小}$表示分划D的小和).设$\forall V_\alpha\in N(\alpha)$,

$\exists N(\alpha,\delta)\subseteq V_\alpha$,

$\Rightarrow\exists D_1,D_2\in T(D)$使得

$\alpha-\delta<S_{D_2}^{小}\le\alpha,\ \alpha\le S_{D_1}^{大}<\alpha+\delta$,

则$\exists D_0\in T(D),D_1$，$D_2\le D_0$使得

当$D_0\le D$时得

$$\alpha-\delta<S_{D_2}^{小}\le S_{D_0}^{小}\le S_D^{小}\le\alpha,$$

$$\alpha-\delta<S_{D_2}^{小}\le S_{D_0}^{小}\le S_D^{小}\le\alpha$$

$$\alpha\le S_D^{大}\le S_{D_0}^{大}\le S_{D_2}^{大}<\alpha+\delta$$

$$\Rightarrow \xi_D\in N(\alpha,\delta)\subseteq V_\alpha(D_0\le D)$$

$$\Rightarrow \xi\to\alpha=\int_a^b f(x)dx.$$

即(R^1,τ_d)内的网ξ以$\int_a^b f(x)dx$为极限；

1.3设网

Copyright © This word is licensed under a Commons Attibution-Non Commercial 4.0 International License.

$\xi \to \beta \Rightarrow \beta = \alpha = \int_a^b f(x)dx$

（否则 $\beta \neq \alpha$,

$\exists V_\alpha \in N(\alpha),\ V_\beta \in N(\beta)$ 使得 $V_\alpha \cap V_\beta = \varnothing$. $\xi \to \alpha \Rightarrow \exists D_1 \in T(D)$ 使 $\xi_D \in V_\alpha (D_1 \le D)$，$\xi \to \beta \Rightarrow \exists D_2 \in T(D)$ 使得 $\xi_D \in V_\beta (D_2 \le D)$.

由于 $T(D)$ 是定向的，所以 $\exists D_0 \in T(D)$ 使得 $D_1,\ D_2 \le D_0 \Rightarrow \xi_{D_0} \in V_\alpha \cap V_\beta \neq \varnothing$ 矛盾）

所以 $\lim_{\tau_d} \xi$ 是单点集，即

$$\lim_{\tau_d} \xi = \left\{ \int_a^b f(x)dx \right\}.$$

2 构造一个网收敛到 Lebesgue 积分 $\int_E f(x)dx$

定理2 设 $f(x)$ 在可测集 $E(\subset R^n)$ 上 *Lebesgue* 可积[2]，则存在 (R^1, τ_d) 内的网 ξ，使得

$$\lim_{\tau_d} \xi = \left\{ \int_E f(x)dx \right\}.$$

证明：

2.1记分划

$$D:\ E = \bigcup_{i=1}^{k} E_i,\ E_i \cap E_j = \varnothing (i \neq j),\ E_i (i = 1,2,\cdots\cdots)$$

可测，记 $T(D) = \{ D \mid D\text{在}E\text{上的分划} \}$[2]，

$D_1, D_2 \in T(D)$，令 D_2 是 D_1 的加细 $\Leftrightarrow D_1 \le D_2$.

$\forall D_1、D_2 \in T(D) \Rightarrow \exists D_0 \in T(D)$[2]，即 $D_i \le D_0 (i = 1,2)$，则偏序 $(T(D), \le)$ 是定向集；

2.2设

$\xi : T(D) \to R^1, D \mapsto \xi_D = S_D^{大}$

（$S_D^{大}$ 表示分划 D 的大和），ξ 是 (R^1, τ_d) 内的网.

记

$$\alpha = \int_E f(x)dx = \inf \{ S_D^{大} \mid D \in T(D) \}$$

设 $V_\alpha \in N(\alpha)$，$\exists N(\alpha, \delta) \subseteq V_\alpha$

$\Rightarrow \exists D_0 \in T(D)$ 使得 $\alpha \le \xi_{D_0} < \alpha + \delta$

$\Rightarrow \alpha \le \xi_D \le \xi_{D_0} < \alpha + \delta (D_0 \le D)$

$\Rightarrow \xi_D \in N(\alpha, \delta) \subseteq V_\alpha (D_0 \le D) \ \Rightarrow$

$\xi \to \alpha$；

2.3设网 $\xi \to \beta \Rightarrow \beta = \alpha$（同理(1.3)可得）

所以 $\lim_{\tau_d} \xi$ 是单点集，即

$$\lim_{\tau_d} \xi = \left\{ \int_E f(x)dx \right\}.$$

3 构造一个网收敛到 Lebesgue 积分 $\int_E f(x)dx$

定理3设 $f(x)$ 在可测集 $E(\subset R^n)$ *Lebesgue* 上可积[3]，则存在 (R^1, τ_d) 内的网 ξ，使 $\lim_{\tau_d} \xi = \left\{ \int_E f(x)dx \right\}$.

证明：

3.1设 $0 \le \varphi_n(x) \le f^+(x)$，$0 \le \psi_n(x) \le f^-(x)$，其中 $\varphi_n(x),\ \psi_n(x)$ 是 E 上的单调递增的简单函数[3]列且 $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f^+(x)$，$\lim_{n\to\infty} \psi_n(x) = f^-(x)$. 记

$$T(D) = \{ T_n \mid T_n = (\varphi_n(x), \psi_n(x)) \}$$

令 $T_i \le T_j (i \le j)$. 则偏序 $(T(D), \le)$ 是定向集；

3.2设

$$\xi : T(D) \to R^1, T_n \mapsto \int_E \varphi_n(x)dx - \int_E \psi_n(x)dx$$

ξ 是 (R^1, τ_d) 内的网.

记

$$\alpha = \int_E f(x)dx = \int_E f^+(x)dx - \int_E f^-(x)dx,$$

有Levi定理可得

$$\lim_{n\to\infty} \int_E \varphi_n(x)dx = \int_E f^+(x)dx < +\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_E \psi_n(x)dx = \int_E f^-(x)dx < +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \xi_{T_n} = \lim_{n\to\infty} \int_E \varphi_n(x)dx - \int_E \psi_n(x)dx = \alpha$$

设 $V_\alpha \in N(\alpha)$，则 $\exists T_{n_0} \in T(D)$，使得 $\exists N(\alpha, \delta) \subseteq V_\alpha$

且当 $T_{n_0} \le T_n (\in T(D))$ 都有

$$\left| \int_E \varphi_n(x)dx - \int_E f^+(x)dx \right| < \frac{\delta}{2},$$

Copyright © This word is licensed under a Commons Attibution-Non Commercial 4.0 International License.

$$\left|\int_E \psi_n(x)dx - \int_E f^-(x)dx\right| < \frac{\delta}{2}$$

$$\Rightarrow \left|\xi_{T_n} - \alpha\right| \le \left|\int_E \varphi_n(x)dx - \int_E f^+(x)dx\right|$$

$$+\left|\int_E \psi_n(x)dx - \int_E f^-(x)dx\right| < \delta$$

$$\Rightarrow \xi_{T_n} \in N(\alpha,\delta) \subseteq V_\alpha$$

所以当 $T_{n_0} \le T_n(\forall T_n \in T(D))$ 都有 $\xi_{T_n} \in V_\alpha$，即 $\xi \to \alpha = \int_E f(x)dx$；

3.3设(3.2)中的网

$$\xi \to \beta \Rightarrow \beta = \alpha = \int_E f(x)dx$$

(否则 $\beta \ne \alpha$，

$\exists V_\alpha \in N(\alpha)$、$V_\beta \in N(\beta)$ 使得 $V_\alpha \cap V_\beta = \varnothing$. 使得 $\xi \to \alpha \Rightarrow$

$\exists T_{n_1} \in T(D)$

当 $T_{n_1} \le T_n$ 时，都有 $\xi_{T_n} \in V_\alpha$，

$\xi \to \beta \Rightarrow \quad \exists T_{n_2} \in T(D)$ 使得当 $T_{n_2} \le T_n$ 时，都有 $\xi_{T_n} \in V_\alpha$.

记 $T_{n_0} = \max\left\{T_{n_1}, T_{n_2}\right\}$

$\Rightarrow \xi_{T_{n_0}} \in V_\alpha \cap V_\beta \ne \varnothing$ 矛盾)

所以 $\lim_{\tau_d} \xi$ 是单点集，即

$$\lim_{\tau_d} \xi = \left\{\int_E f(x)dx\right\}.$$

[基金项目]

宁夏高等学校一流学科建设(教育学学科)资助项目(NXYLXK2017B11)；国家自然科学基金资助项目(11701306)。

[参考文献]

[1]陈纪修,於崇华,金路.数学分析(第三版上册)[M].北京:高等教育出版社,2019:232-243.

[2]许静波,程晓亮.实变函数论[M].北京:北京大学出版社,2016:77-81.

[3]程其襄,张奠宙,胡善文,等.实变函数与泛函分析基础(第四版)[M].北京:高等教育出版社,2020:67-86.

[4]梁基华,蒋继光.拓扑学基础[M].北京:高等教育出版社,2012:10-44.

[5]王戈平.诱导LF拓扑空间中网的收敛性[J].模糊系统与数学,2000,(14):1-2.

作者简介：

房琦贵(1981--),男,汉族,宁夏固原人,硕士,宁夏师范学院数计学院,讲师,研究方向：为微分方程理论及应用。

Copyright © This word is licensed under a Commons Attibution-Non Commercial 4.0 International License.