文章类型：论文 | 刊号（ISSN）：2630-4686 /（中图刊号）：380GL020

基于寿命试验的二参数 Weibull 分布的参数估计

李玲
重庆工商大学
DOI:10.12238/er.v8i8.6308

[摘　要] 该研究基于在寿命试验中产品的失效数据服从 Weibull 分布，讨论其模型参数以及点估计和广义区间估计。在点估计方面，给出常见的矩估计，并对矩估计的同变性和相合性进行研究；利用牛顿-拉夫森（Newton-Raphson）迭代算法得到参数的最大似然估计；基于 Mellin 变换使用对数累积量法对参数进行估计。在区间估计方面,分别计算两参数的广义置信区间和 Wald 置信区间。
[关键词] Weibull 分布；寿命试验；点估计；广义区间估计
中图分类号：O213.2 文献标识码：A

Parameter Estimation of Two Parameter Weibull Distribution Based on Life Test

Ling Li
Industrial and Commercial University Of Chongqing

Abstract: This paper discusses the model parameters and point estimation as well as generalized interval estimation of products based on failure data that follow an Weibull distribution in life tests. In terms of point estimation, common moment estimators are presented, and their invariance and consistency are studied; the maximum likelihood estimation of parameters is obtained using the Newton−Raphson (Newton−Raphson) iterative algorithm; parameter estimation is performed using the log cumulative method based on Mellin transformation. For interval estimation, generalized confidence intervals and Wald confidence intervals for two parameters are calculated separately.
Keywords: Weibull distribution; life test; point estimation; generalized interval estimation

引言

在产品开发和质量监控过程中，可靠性评估是确保产品长期性能的关键因素之一[1]。可靠性试验是指通过一系列科学的试验方法，对产品的可靠性进行测试和评估的过程。这些试验通常包括但不限于寿命试验、环境应力筛选试验、高加速寿命试验(HAST)等，目的是验证产品在实际使用条件下的性能，以及在极端条件下是否能够保持其功能的稳定性。

Weibull 分布作为一种强大的统计工具，因其能够灵活的模拟不同类型的寿命数据而被广泛应用于可靠性分析，现已有诸多文献对其进行过讨论。Gibbons 和 Vance 对其参数点估计做了模拟比较；Nelson 讨论了参数的最大似然估计；叶慈南讨论完全样本下两个参数的矩型估计，并同简单线性无偏估计进行比较[2]；戴林松和王枞讨论了广义逆威布尔分布应力强度模型可靠度的极大似然估计以及置信区间[3]。目前对于寿命试验中二参数 Weibull 分布，因其密度函数表达式复杂，对于两个参数的估计也是讨论的热点，因此本文利用几种估计方法对寿命试验情形下的 Weibull 分布进行参数点估计和区间估计。

1 Weibull 分布预备知识

1.1 函数及其数字特征

Weibull 分布(韦伯分布、威布尔分布)是一个二参数寿命分布，首次由瑞典工程师和物理学家 Wallodi Weibull 于 1936 年提出，其概率密度函数表达式为：

$$f(x;\alpha,\lambda)=\frac{\alpha}{\lambda}(\frac{x}{\lambda})^{\alpha-1}\exp\{-(\frac{x}{\lambda})^{\alpha}\} \tag{1}$$

其分布函数表达式为：

$$F(x;\alpha,\lambda)=1-\exp\{-(\frac{x}{\lambda})^{\alpha}\} \tag{2}$$

其中，$x>0$，α 为形状参数，$\alpha>0$；λ 为尺度参数，$\lambda>0$，记为 $X\sim Wei(\alpha,\lambda)$ 。

根据数学期望定义，有：

$$E(X)=\int_0^{\infty}x\frac{\alpha}{\lambda}(\frac{x}{\lambda})^{\alpha-1}\exp\{-(\frac{x}{\lambda})^{\alpha}\}dx=\lambda\Gamma(\frac{1}{\alpha}+1) \tag{3}$$

总体 X 的 k 阶矩为：

$$E(X^k)=\int_0^{\infty}x^k\frac{\alpha}{\lambda}(\frac{x}{\lambda})^{\alpha-1}\exp\{-(\frac{x}{\lambda})^{\alpha}\}dx=\lambda^k\Gamma(\frac{k}{\alpha}+1) \tag{4}$$

此外，根据概率密度函数（1），推导得：

$$E(X^{-1})=\frac{\Gamma(1-\frac{1}{\alpha})}{\lambda} \tag{5}$$
$$E(X^{-2})=\frac{\Gamma(1-\frac{2}{\alpha})}{\lambda^2}$$

当 $\frac{2}{\alpha}$ 不为整数时，有：

$$\alpha=\frac{\pi E(X^2)\cdot E(X^{-2})}{E(X)\cdot E(X^{-1})\cdot\sqrt{[E(X^2)\cdot E(X^{-2})]^2-[E(X)\cdot E(X^{-1})]^2}} \tag{6}$$
$$\lambda=\frac{E(X)}{\Gamma(1+\frac{1}{\alpha})}$$

1.2 参数渐变特性

随着形状参数 α 和尺度参数 λ 的变化，分布的形态会发生变化。这些变化影响了分布的集中趋势、偏斜程度以及尾部的厚度。

观察上述结果发现，尺度参数 λ 对期望均值的影响很大，当 $\alpha\to\infty$ 时，$\lambda\to E(X)$。

尺度参数 λ 主要影响分布的尺度，较大的 λ 值意味着分布更加“拉长”，表示较长的平均寿命或更大的寿命范围；较小的 λ 值意味着较短的平均寿命或较窄的寿命范围。

形状参数 α 决定了 Weibull 分布的形状特征：

（1）$\alpha<1$ 时，分布具有下降的“陡峭”形态，常用来描述由于初始缺陷或制造瑕疵导致的早期失效。

（2）$\alpha=1$ 时，Weibull 分布退化成指数分布 $Exp(1)$。指数分布的特点是失效率恒定，即产品的失效率在整个生命周期内保持不变。

（3）$\alpha>1$ 时，分布呈现出“钟形”或“对称”形态，失效率随着时间的增长而上升，反映了由于磨损或老化导致的后期失效。

2 参数的点估计

2.1 矩估计法

这是一种基于大数定律的估计方法，其思想是指在样本容量足够大的情况下，样本矩收敛于总体矩。据此，根据 Weibull 分布的样本矩去估计其总体矩。

设产品寿命 $X\sim Wei(\alpha,\lambda)$，$X_1,X_2,...,X_n$ 为来自总体的 n 个独立样本，则总体的 k 阶原点矩为：

$$E(X^k)=\lambda^k\Gamma(\frac{k}{\alpha}+1) \tag{7}$$

$X_1,X_2,...,X_n$ 的 k 阶原点矩为：

$$A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k \tag{8}$$

由大数定律有，当样本容量 $N\to\infty$ 时，$A_k\to E(X^k)$

据此，建立双参数的估计模型：

$$\lambda^k\Gamma(\frac{k}{\alpha}+1)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k$$

由此可得 α 和 λ 的估计：

$$\hat{\alpha}=\frac{\pi B_2}{B_1\sqrt{B_2^2-B_1^2}} \tag{9}$$
$$\hat{\lambda}=\frac{A_1}{\Gamma(\frac{1}{\hat{\alpha}}+1)}$$

其中 $A_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$B_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^{-1}$，$B_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^{-2}$。

观察可知，Weibull 分布两个参数的矩估计模型简单直观，但该方法必须样本足够大，若样本容量较小，该方法得到的参数估计结果将存在较大误差。

2.1.1 矩估计的同变性

设产品寿命 $X\sim Wei(\alpha,\lambda)$，根据式（1），$X$ 的概率密度为：

$$f(x;\alpha,\lambda)=\frac{\alpha}{\lambda}(\frac{x}{\lambda})^{\alpha-1}\exp\{-(\frac{x}{\lambda})^{\alpha}\},\ x>0$$

现 X 发生量纲变化，记 $Y=cX$，其中 $c>0$ 是一个常数，变换后的随机变量 $Y=cX$ 的分布函数为：

$$F_Y(y)=F_X(\frac{y}{c})=1-\exp\{-(\frac{y/c}{\lambda})^{\alpha}\}$$

概率密度函数为：

$$f_Y(y)=\frac{d}{dx}F_Y(y)=\frac{d}{dy}[F_X(\frac{y}{c})]$$

代入可得：

$$f_Y(y)=\frac{d}{dy}\{1-\exp[-(\frac{y/c}{\lambda})^{\alpha}]\}=\frac{\alpha}{c\lambda}(\frac{y}{c\lambda})^{\alpha-1}\exp\{-(\frac{y}{c\lambda})^{\alpha}\}$$

由此可得 $Y=cX\sim Wei(\alpha,c\lambda)$，参数 α 不变，λ 变为 $c\lambda$，与自变量 X 发生同级量纲变化。

上述性质要求 α 和 λ 的估计满足以下条件：

$$\hat{\alpha}(X_1,\ldots,X_n)=\hat{\alpha}(cX_1,\ldots,cX_n)；$$
$$c\hat{\lambda}(X_1,\ldots,X_n)=\hat{\lambda}(cX_1,\ldots,cX_n)$$

这叫作估计的同变性，也称为尺度不变性。

对于 Weibull 分布来说，尺度参数的变换 $Y=cX$ 会影响到尺度参数 λ，但分布的形状保持不变，也就是说，Weibull 分布的矩估计具有同变性，这使得 Weibull 分布在实际应用中，例如可靠性分析和寿命数据建模中，可以通过简单的尺度变换来适应不同的数据范围。

2.1.2 矩估计的相合估计

文章类型：论文｜刊号（ISSN）：2630-4686 /（中图刊号）：380GL020

定理 1：设 $X_1,\ldots,X_n$ 为独立同分布变量序列，$E\left|X_1\right|^k<\infty$，$\theta=g(\mu_1,\ldots\mu_k)$，并设 g 是连续的，则矩估计 $\hat{\theta}=g(m_1,\ldots m_k)$ 是 θ 的相合估计。

$X\sim Wei(\alpha,\lambda)$，$X_1,X_2,\ldots,X_n$ 是 n 个独立同分布样本，当 $n\to\infty$ 时，由大数定律可得：

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\xrightarrow{p}EX,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^{\,2}\xrightarrow{p}EX^2$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^{-1}\xrightarrow{p}EX^{-1},\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^{-2}\xrightarrow{p}EX^{-2}$$

由式（6）知：

$$\alpha=\frac{\pi E(X^2)\cdot E(X^{-2})}{E(X)\cdot E(X^{-1})\cdot\sqrt{[E(X^2)\cdot E(X^{-2})]^2-[E(X)\cdot E(X^{-1})]^2}}$$

$$\lambda=\frac{E(X)}{\Gamma(1+\frac{1}{\alpha})}$$

由式（9）知 α 和 λ 的矩估计为：

$$\hat{\alpha}=\frac{\pi B_2}{B_1\sqrt{B_2^2-B_1^2}}$$

$$\hat{\lambda}=\frac{A_1}{\Gamma(\frac{1}{\hat{\alpha}}+1)}$$

根据定理 1 有：

$$\hat{\alpha}\xrightarrow{p}\alpha,\hat{\lambda}\xrightarrow{p}\lambda$$

即 $\hat{\alpha}$和$\hat{\lambda}$ 是 α和λ 的相合估计。

2.2 最大似然估计法

最大似然估计（Maximum Likelihood Estimation, MLE）是基于似然函数的一种参数估计方法，其基本思想是通过选择使观察到的数据最有可能发生的参数来估计模型的参数。

据此，将取得服从 Weibull 分布的样本 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 看作试验结果，则出现这个结果的概率就可以由似然函数来刻画，样本数据 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 的联合概率即为似然函数，即为：

$$L(x;\alpha,\lambda)=\prod_{i=1}^{n}f(x;\alpha,\lambda)=\frac{\alpha^n}{\lambda^{n\alpha}}\prod_{i=1}^{n}x_i^{\alpha-1}\exp\{\sum_{i=1}^{n}[-(\frac{x_i}{\lambda})^\alpha]\}\qquad(10)$$

最大似然估计的目标是找到使得似然函数最大的参数值，参数 (α,λ) 的估计值 $(\hat{\alpha},\hat{\lambda})$ 即为似然函数取最大值时参数的取值。上式（10）似然函数关于参数 α和λ 均可微，但该似然函数为多项式乘积，直接最大化似然函数有困难，不便于直接微分，考虑最大化似然函数的对数，对数变换不改变最大化结果，仍在同一处 (α,λ) 取得最大值，其对数似然函数表达式为：

$$l(\alpha,\lambda)=\ln L(\alpha,\lambda)=n\ln\alpha+\sum_{i=1}^{n}(\alpha-1)\ln x_i-n\alpha\ln\lambda-\sum_{i=1}^{n}(\frac{x_i}{\lambda})^\alpha\qquad(11)$$

对上式求参数 (α,λ) 的一元偏导数，令其为 0，有：

$$\frac{\partial l(\alpha,\lambda)}{\partial\alpha}=\frac{n}{\alpha}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-\sum_{i=1}^{n}(\frac{x_i}{\lambda})^\alpha\ln\frac{x_i}{\lambda}-n\ln\lambda=0$$

$$\frac{\partial l(\alpha,\lambda)}{\partial\lambda}=\sum_{i=1}^{n}\alpha\lambda^{-\alpha-1}x_i^\alpha-\frac{n\alpha}{\lambda}=0$$

化简得：

$$\frac{n}{\alpha}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^\alpha\ln x_i}{\lambda^\alpha}=0$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^\alpha}{\lambda^\alpha}-n=0\qquad(12)$$

上式方程组（12）为超越方程组，求解困难，在此用牛顿-拉夫森（Newton-Raphson）算法计算其近似值。该算法是一种用于寻找函数零点的迭代方法，在数值分析中广泛应用于非线性方程的求解，是一种局部收敛的算法，其核心思想是使用泰勒级数展开来迭代逼近方程的根。

设非线性方程组：

$$g_1(\alpha,\lambda)=\frac{n}{\alpha}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^\alpha\ln x_i}{\lambda^\alpha}$$

$$g_2(\alpha,\lambda)\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^\alpha}{\lambda^\alpha}-n$$

对应方程组的 Jacobi 矩阵为：

$$J'(\alpha,\lambda)=\begin{pmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial\alpha} & \frac{\partial g_1}{\partial\lambda}\\ \frac{\partial g_2}{\partial\alpha} & \frac{\partial g_2}{\partial\lambda}\end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial\alpha}=-\frac{n}{\beta^2}-\frac{\ln\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i^\alpha\ln x_i+\sum_{i=1}^{n}x_i^\alpha(\ln x_i)^2}{\lambda^\alpha},\frac{\partial g_1}{\partial\lambda}=\frac{\alpha\sum_{i=1}^{n}x_i^\alpha\ln x_i}{\lambda^{\alpha+1}}$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial\alpha}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^\alpha\ln x_i+\ln\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i^\alpha}{\lambda^\alpha},\frac{\partial g_2}{\partial\lambda}=-\frac{\alpha\sum_{i=1}^{n}x_i^\alpha}{\lambda^{\alpha+1}}$$

若 Jacobi 矩阵是非奇异矩阵，可求得 α 和 λ 近似值，这里假设求得的近似值分别为 α_0 和 λ_0，令

$\theta_k=\binom{\alpha_k}{\lambda_k}, k=0,1,2,\ldots$，$J(\theta_0)=\begin{pmatrix} g_1(\alpha_0,\lambda_0) \\ g_2(\alpha_0,\lambda_0) \end{pmatrix}$，则迭代公式为：

$$\theta_{k+1}=\binom{\alpha_{k+1}}{\lambda_{k+1}}=\theta_k-[J'(\theta_k)]^{-1}\cdot J(\theta_k)$$

检查新计算的值是否足够接近真实值，或者提前选取一定范围精度和初始值，通过检查 $J(\theta_{k+1})=\begin{pmatrix} g_1(\alpha_{k+1},\lambda_{k+1}) \\ g_2(\alpha_{k+1},\lambda_{k+1}) \end{pmatrix}$ 是否接近 0，或者判断 $|\theta_{k+1}-\theta_k|$ 是否小于预设的容忍误差来确定，如果满足条件，则停止迭代，则求出方程组（12）的解，即为两参数的最大似然估计 $\hat{\alpha}_{MLE}$ 和 $\hat{\lambda}_{MLE}$，否则继续迭代，直到满足条件为止。

上述根据牛顿-拉夫森迭代算法求得估计值的前提条件是 Jacobi 矩阵是非奇异矩阵，若该矩阵是奇异矩阵，则其行列式为零，矩阵不可逆，则无法进行迭代，将导致结果不收敛，此时无法求得最大似然估计值，此时可以使用改进的算法，如拟牛顿法，或者改用最小二乘法求解估计值。

2.3 对数累积量法

对数累积量法（Log-Linear Cumulants Method），结合了对数变换和累积量的理论来估计分布的参数，其核心思想是利用对数生成函数来估计模型的参数。Weibull 分布具有右偏性质，对数累积量法基于 Mellin 变换，通过对数据进行对数变换，使得对右半轴分布的概率密度函数的参数估计更加简单和准确。

对一般的概率密度函数 f(x)，其 Mellin 变换为：

$$M\{f(x);s\}=\varphi(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}f(x)dx \qquad (13)$$

将 Mellin 变换应用到对数形式的函数：

$$\Phi(s)=\ln M\{f(x);s\}=\ln\varphi(s)=\ln\int_0^{+\infty}x^{s-1}f(x)dx \qquad (14)$$

上式（14）即为对数生成函数，对数累积量是对数生成函数的系数，通过对对数生成函数进行泰勒展开，得到累积量。

对式（14）进行泰勒展开：

$$\Phi(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k_n s^n}{n!}$$

其中，k_n 是累积量，为：

$$k_n=\frac{d^n}{ds^n}\Phi(s)$$

对于（13）式，求其关于 s 的 n 阶导函数，可得：

$$\omega_n=\frac{d^n}{ds^n}\varphi(s)=\int_0^{+\infty}(\ln x)^n f(x)dx \qquad (15)$$

观察可知式(15)为函数 $f(x)$ 的 n 阶对数矩 $E[(\ln X)^n]$。

取 n 分别为 1 和 2，可得：

$$\omega_1=\int_0^{+\infty}(\ln x)f(x)dx=E(\ln X)$$

$$\omega_2=\int_0^{+\infty}(\ln x)^2 f(x)dx=E[(\ln X)^2]$$

对数累积量 k_1,k_2 与 ω_1,ω_2 有如下关系：

$$k_1=\omega_1, k_2=\omega_2-\omega_1^{\,2}$$

由样本计算对数矩，从而得到 ω_1,ω_2 的估计值，根据 ω_1,ω_2 估计值可以得到 k_1,k_2 的估计值。

若 $X\sim Wei(\alpha,\lambda)$，通过计算得：

$$\omega_1=E(\ln X)=\lambda[\psi(1+\frac{1}{\alpha})+\ln\lambda]$$

$$\omega_2=E[(\ln X)^2]=\lambda^2\{\psi^{(1)}(1+\frac{1}{\alpha})+[\psi(1+\frac{1}{\alpha})+\ln\lambda]^2\}$$

其中 ψ 是 digamma 函数，$\psi^{(1)}$ 是 trigamma 函数，表达式分别为：

$$\psi(x)=\frac{d}{dx}\log\Gamma(x), \psi^{(1)}(x)=\frac{d^2}{dx^2}\log\Gamma(x)$$

且该分布的对数累积函数为：

$$k_1=\omega_1=\lambda[\psi(1+\frac{1}{\alpha})+\ln\lambda]$$

$$k_2=\omega_2-\omega_1^{\,2}=\lambda^2\psi^{(1)}(1+\frac{1}{\alpha})$$

则建立参数的估计模型如下：

$$\begin{aligned} \lambda[\psi(1+\frac{1}{\alpha})+\ln\lambda]&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln X_i \\ \lambda^2\psi^{(1)}(1+\frac{1}{\alpha})&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\ln X_i-k_1)^2 \end{aligned} \qquad (16)$$

借助计算机软件求上式的解，即可得到参数 α 和 λ 的估计值。

3 参数的区间估计

3.1 广义区间估计

对于产品寿命 $X\sim Wei(\alpha,\lambda)$，由式（2）可知其分布函数 $F(x)=1-\exp\{-(\frac{x}{\lambda})^{\alpha}\}$，若 $X_1,\ldots,X_n$ 为该分布的相互独立同

文章类型：论文 | 刊号（ISSN）：2630-4686 /（中图刊号）：380GL020

分布的试验样本，次序统计量 $X_{(1)} < X_{(2)} < ... < X_{(n)}$，经过变换可得 $F(X_{(1)}) \le F(X_{(2)}) \le ... \le F(X_{(n)})$ 为来自均匀分布 $U(0,1)$ 的次序统计量，由此可得 $-\ln F(X_{(n)}) \le -\ln F(X_{(n-1)}) \le ... \le -\ln F(X_{(1)})$ 为来自指数分布 $Exp(1)$ 的次序统计量。

引理 1：令 $V_{(i)} = -\ln F(X_{(n-i+1)}), i = 1,...,n$，则 $V_{(1)} < V_{(2)} < ... < V_{(n)}$ 为来自指数分布 $Exp(1)$ 的次序统计量。令 $V_{(0)} = 0$，$W_i = (n-i+1)(V_{(i)} - V_{(i-1)}), i = 1,2,...,n$，则有：

$$W_1 = nV_{(1)}, W_2 = (n-1)(V_{(2)} - V_{(1)}), ..., W_n = V_{(n)} - V_{(n-1)}$$

且 $W_1, W_2, ..., W_n$ 相互独立并均服从指数分布 $Exp(1)$，Arnold 等人于 1992 证明了该引理。

在引理 1 的条件基础上，在此给出引理 2：假设当 $i = 1,2,...,n-1$ 时，令

$\varphi_i = W_1 + W_2 + ... + W_i$，$S_i = (\frac{\varphi_i}{\varphi_{i+1}})^i$，

即 $\varphi_1 = W_1, ..., \varphi_{n-1} = W_1 + W_2 + ... + W_{n-1}$，

$S_1 = \frac{\varphi_1}{\varphi_2}, ..., S_{n-1} = (\frac{\varphi_{n-1}}{\varphi_n})^{n-1}$，当 $i = n$ 时，$S_n = \varphi_n = W_1 + W_2 + ... + W_n$，则有以下结论：

（1）

$S_1, S_2, ..., S_n$ 相互独立，且 $S_1 = \frac{\varphi_1}{\varphi_2}, S_2 = (\frac{\varphi_2}{\varphi_3})^2, ..., S_{n-1} = (\frac{\varphi_{n-1}}{\varphi_n})^{n-1}$ 相互独立服从均匀分布 $U(0,1)$。

（2）$2\varphi_n \sim \chi^2(2n)$

王炳兴于 1992 年证明了该引理[4]。

由于 $S_1 = \frac{\varphi_1}{\varphi_2}, S_2 = (\frac{\varphi_2}{\varphi_3})^2, ..., S_{n-1} = (\frac{\varphi_{n-1}}{\varphi_n})^{n-1}$ 相互独立且服从均匀分布 $U(0,1)$，则有 $-\ln S_1 = -\ln\frac{\varphi_1}{\varphi_2}, -\ln S_2 = -\ln(\frac{\varphi_2}{\varphi_3})^2, ..., -\ln S_{n-1} = -\ln(\frac{\varphi_{n-1}}{\varphi_n})$ 服从指数分布 $Exp(1)$。

由引理 1 和引理 2 可知：

$$\varphi_{n-1} = W_1 + ... + W_{n-1} = nV_{(1)} + (n-1)(V_{(2)} - V_{(1)}) + ... + (V_{(n)} - V_{(n-1)}) = V_{(1)} + V_{(2)} + ... + V_{(n)}$$

则有：

$$2\varphi_{n-1} = -2\sum_{i=1}^{n-1}\ln S_i = -2\sum_{i=1}^{n-1}\ln(\frac{\varphi_i}{\varphi_{i+1}})^i = 2\sum_{i=1}^{n-1}\ln\frac{\varphi_n}{\varphi_i} \sim \chi^2(2n-2)$$

令 $H(\alpha) = 2\sum_{i=1}^{n-1}\ln\frac{\varphi_n}{\varphi_i}$，$H(\alpha) \sim \chi^2(2n-2)$，$H(\alpha)$ 只依赖形状参数 α，且 $H(\alpha)$ 是参数 α 的单调增函数，证明见参考文献[3]。

$X \sim Wei(\alpha, \lambda)$，$X_1, ..., X_n$ 为该分布的相互独立同分布的试验样本，次序统计量 $X_{(1)} < X_{(2)} < ... < X_{(n)}$，$x = \{x_{(1)}, x_{(2)}, ..., x_{(n)}\}$ 是其次序统计量的观测值。

给定随机数 $h \sim \chi^2(2n-2)$，$H(\alpha)$ 为 α 增函数，则解方程 $H(\alpha) = h$ 可得 α 唯一解 $g(h,x)$，令其为 α 的枢轴量 T_α，则参数 α 在置信水平为 $100(1-\eta)\%$ 的条件下的广义置信区间为：

$$[T_{\alpha,1-\eta/2}, T_{\alpha,\eta/2}]$$

式中 $T_{\alpha,\eta}$ 为 T_α 的上侧分位点。

由引理 2 可知：

$$2\varphi_n = -2\sum_{i=1}^{n}\ln F(X_{(n-i+1)}) = -2\sum_{i=1}^{n}\ln[1 - \exp\{-(\frac{X_{(n-i+1)}}{\lambda})^\alpha\}] \sim \chi^2(2n)$$

给定随机数 $z \sim \chi^2(2n)$，则有：

$$-2\sum_{i=1}^{n}\ln[1 - \exp\{-(\frac{X_{(n-i+1)}}{T_\lambda})^{g(h,x)}\}] = z \qquad (17)$$

由上式（17）可得尺度参数 λ 的枢轴量 T_λ，则参数 λ 在置信水平为 $100(1-\eta)\%$ 的条件下的广义置信区间为：

$$[T_{\lambda,1-\eta/2}, T_{\lambda,\eta/2}]$$

3.2 Wald 区间估计

Wald 置信区间是一种估计参数不确定性的区间估计方法，基于估计量的标准误差来构建的置信区间。

对于双参数 Weibull 分布，$X \sim Wei(\alpha, \lambda)$，其 Fisher 信息矩阵为：

$$I(\alpha,\lambda)=E\begin{bmatrix}-\dfrac{\partial^2\ln L(\alpha,\lambda)}{\partial\alpha^2} & -\dfrac{\partial^2\ln L(\alpha,\lambda)}{\partial\alpha\partial\lambda}\\ -\dfrac{\partial^2\ln L(\alpha,\lambda)}{\partial\alpha\partial\lambda} & -\dfrac{\partial^2\ln L(\alpha,\lambda)}{\partial\lambda^2}\end{bmatrix} \quad (18)$$

由式（11）可知 Weibull 分布的对数似然函数为：

$$\ln L(\alpha,\lambda)=n\ln\alpha+\sum_{i=1}^{n}(\alpha-1)\ln x_i-n\alpha\ln\lambda-\sum_{i=1}^{n}(\frac{x_i}{\lambda})^{\alpha}$$

由于对上式计算二阶导后再计算期望较困难，考虑将α和λ的最大似然估计带入，因此可以得到观测 Fisher 信息阵：

$$I(\hat{\alpha}_{MLE},\hat{\lambda}_{MLE})=\begin{bmatrix}-\dfrac{\partial^2\ln L(\alpha,\lambda)}{\partial\alpha^2} & -\dfrac{\partial^2\ln L(\alpha,\lambda)}{\partial\alpha\partial\lambda}\\ -\dfrac{\partial^2\ln L(\alpha,\lambda)}{\partial\alpha\partial\lambda} & -\dfrac{\partial^2\ln L(\alpha,\lambda)}{\partial\lambda^2}\end{bmatrix}_{\alpha=\hat{\alpha}_{MLE},\lambda=\hat{\lambda}_{MLE}} \quad (19)$$

根据上式（19）得到其逆矩阵，也即$\hat{\alpha}_{MLE}$和$\hat{\lambda}_{MLE}$的协方差阵$I^{-1}(\hat{\alpha}_{MLE},\hat{\lambda}_{MLE})$可得$Var(\hat{\alpha}_{MLE})$和$Var(\hat{\lambda}_{MLE})$。

对于一个给定的置信水平$100(1-\eta)\%$，若Z_η是标准正态分布的上侧η分位数，通过标准正态分布的分位点$Z_{\eta/2}$确定区间边界，则可得α的 Wald 置信区间为：

$$[\hat{\alpha}_{MLE}-Z_{\eta/2}\sqrt{Var(\hat{\alpha}_{MLE})},\hat{\alpha}_{MLE}+Z_{\eta/2}\sqrt{Var(\hat{\alpha}_{MLE})}]$$

λ的 Wald 置信区间为：

$$[\hat{\lambda}_{MLE}-Z_{\eta/2}\sqrt{Var(\hat{\lambda}_{MLE})},\hat{\lambda}_{MLE}+Z_{\eta/2}\sqrt{Var(\hat{\lambda}_{MLE})}]$$

4 结语

本文深入探讨了基于寿命试验数据的二参数 Weibull 分布的参数估计方法，涵盖了从理论基础到具体应用的多个方面。通过分析矩估计、最大似然估计以及对数累积量法在 Weibull 分布参数估计中的应用，揭示了不同估计方法的特点及其适用场景。研究表明，尽管矩估计法简单直观，但在样本量较小的情况下可能不够准确；相比之下，最大似然估计法虽然计算复杂，但能提供更精确的参数估计结果，特别是在处理非线性方程组时采用的牛顿-拉夫森迭代算法展示了其强大的求解能力。此外，对数累积量法为处理右偏分布的数据提供了一种有效的解决方案，进一步扩展了 Weibull 分布在可靠性工程中的应用范围。

在区间估计方面，本文不仅介绍了广义置信区间的构建方法，还讨论了 Wald 置信区间的应用，为评估参数估计的不确定性提供了科学依据。这些方法和结论对于提高产品可靠性的评估准确性具有重要意义，也为后续研究提供了坚实的基础。未来的工作可以着眼于如何进一步优化参数估计方法，尤其是在面对复杂环境条件下的寿命数据分析时，探索更加高效、精确的统计方法和技术手段，以满足实际工程应用的需求。希望本研究能够激发更多关于 Weibull 分布及其在可靠性工程领域中应用的深入探讨，并为相关领域的学者和工程师提供有价值的参考。

[参考文献]

[1] 茆诗松，王玲玲．加速寿命试验[M]．北京：科学出版社，1997.

[2] 叶慈男．完全样本情形下威布尔分布参数的估计[J]．应用概率统计，2013，19(3)：259-266.

[3] 戴林松，王枞．基于广义逆威布尔分布的应力强度模型可靠度估计[J]．统计与决策，2020，36(9)：25-29.

[4] 王炳兴．Weibull 分布的统计推断[J]．应用概率统计，1992，8：357-364.

作者简介：

李玲（1994.07-），女，汉族，湖北荆州人，硕士研究生，研究方向为数理统计。