

三维可视化下偏导数几何意义教学研究

杨涛 石川

四川民族学院

DOI:10.32629/er.v9i6.7118

[摘要] 针对高等数学教学中学生在偏导数学习中“能计算而难理解”的现实困境，本研究以二元函数图像、固定变量截面及截面曲线切线斜率为主要对象，借助 Three.js 三维交互程序，开展偏导数几何意义的教学设计研究。程序通过函数输入、 P/Q 两点切线斜率比较、 x/y 轴方向的截面显隐控制、切线斜率显示与偏导数不存在警告，将抽象的理论概念转化为可观察、可操作的学习对象。该设计能强化学生对偏导数方向性、局部性及存在性的理解，为多元函数微分学概念教学提供一定的参考。

[关键词] 偏导数；几何意义；三维可视化；截面曲线；切线斜率

中图分类号：O172 **文献标识码：**A

Research on Teaching the Geometric Meaning of Partial Derivatives under Three-dimensional Visualization

Tao Yang, Chuan Shi

Sichuan Minzu College

Abstract: To address the common problem that students learning higher mathematics are able to calculate partial derivatives but struggle to grasp their connotation, this study selects the surface of a bivariate function, sections with fixed variables and the slope of tangent lines to section curves as major research objects. With the help of a Three.js-based three-dimensional interactive program, the paper carries out research on the teaching design for the geometric meaning of partial derivatives. Equipped with functions including function input, comparison of tangent slopes at two points, visibility control of sections along the x -axis and y -axis, display of tangent slopes, and prompt reminders for non-existent partial derivatives, the program converts abstract theoretical concepts into observable and operable learning resources. This design can deepen students' understanding of the directionality, locality and existence of partial derivatives, and provides a reference for the teaching of concepts in multivariable differential calculus.

Keywords: partial derivative; geometric meaning; three-dimensional visualization; section curve; slope of tangent lines

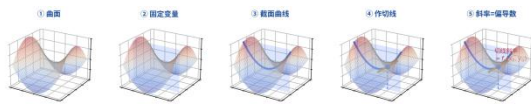
引言

偏导数是高等数学和数学分析中多元函数微分学的基础概念，也是学生由一元函数导数过渡到多元函数局部变化研究的重要关口。对于一些空间感弱的学生，只凭想象三维立体图像是很难能够真正理解的，很有可能梳理不好他们之间的关系，使学生思维受到局限，解题没有效率，思维能力也得不到提升。传统课堂中，偏导数常以“求 x 偏导时将 y 看成常数、求 y 偏导时将 x 看成常数”的计算规则出现。该规则便于操作，却容易使学生把偏导数理解为形式化求导技巧，忽视其背后的空间几何结构。学生在作业中可以顺利写出 f_x 和 f_y ，却难以回答“斜率来自哪条曲线”“固定变量在图形上意味着什么”“为什么偏导数依赖方向和点”这类概念性问题。

已有研究表明，使 GeoGebra 等动态数学软件能够直观、动态、交互地呈现高等数学概念，不仅有助于教师教学，更有助于学生学习，便于理解和体会，还能在课后起到很好的辅助作用。能够使利用网络教学资源与传统教学方法充分融合，让课堂不再枯燥，无论是对于教师还是对于学生来讲，都是新鲜的、有趣的、能够抓住眼球的，使学生自主去探索未知的领域，在有趣且高效的交互中获得知识。这样不仅能够提高课堂教学效率，同时也激发了学生的学习潜力和综合能力，帮助学生更深刻地了解和掌握所学知识，使学生成为课堂的主导者，提高了实际的应用能力^[1-2]；数学分析课程改革也强调，通过多维度的动图程序可全方位地展示对象的几何特征，利于学生观察理解偏导数、梯度、线面积分、重积分等概念的几何与物理意义，掌握一元与多元函数的区

别与联系。这些优势都是传统平面视图所无法比拟的^[3]。同时，智慧课堂、问题驱动和混合式教学研究也提示，信息技术只有嵌入明确的问题链和学习活动，才能从“展示工具”转化为“认知支架”^[4-7]。

基于上述研究，本文围绕“截面曲线与切线斜率”建立教学设计。旨在回答：如何借助三维可视化将偏导数从计算规则转化为几何理解？如何在课堂中组织“曲面—截面—切线—斜率—偏导数”的概念建构过程？



二元函数曲面→固定一个变量→得到截面曲线→作截面曲线切线→切线斜率即偏导数

图1 偏导数几何意义的教学认知链条

1 偏导数几何意义的教学困境

1.1 “固定变量”的几何含义被弱化

偏导数学习的关键是从二元函数回到一元函数。设二元函数图像为曲面，固定 $y = y_0$ 时，曲面与平面 $y = y_0$ 相交得到截面曲线；固定 $x = x_0$ 时，曲面与平面 $x = x_0$ 相交得到另一条截面曲线。学生若只记住“把另一个变量看成常数”，就容易把固定变量理解为代数处理，而不能把它看作空间中的截面操作。

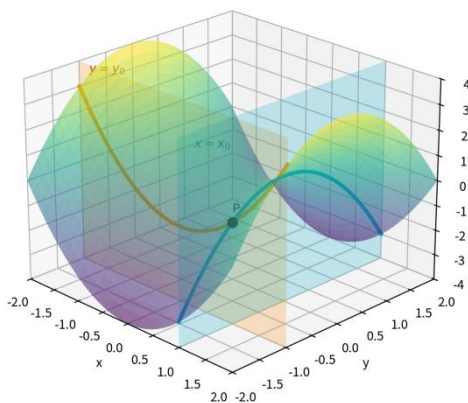


图2 固定变量形成截面平面的几何示意

1.2 “斜率”对象不清导致概念混淆

一元函数导数的几何意义是平面曲线在一点处的切线斜率，而二元函数的图像是曲面。曲面在一点处并不存在唯一的“斜率”，只有给定方向后，变化率才具有确定含义。偏导数中的斜率不是曲面整体的斜率，而是相应截面曲线在指定点处的切线斜率。这一对象转换若没有被清晰呈现，学生容易把 f_x 和 f_y 视为两个计算符号，而不是两个坐标方向上的局部变化率。

1.3 存在性判断缺少直观支撑

偏导数的存在性本质上取决于对应截面曲线在该点处是否可导。对于含绝对值、根式或分段结构的函数，学生常因过度依赖公式而忽视切线是否存在。若能将“偏导数不存在”转化为截面曲线出现尖点、断裂或无稳定切线的视觉现象，学生对存在性的理解将更加深入。

2 三维可视化程序的教学功能设计

本文所用程序基于 Three.js 建立三维场景。程序允许教师输入函数表达式，动态生成二元函数曲面，并设置 P、Q 两个观察点；通过复选框分别显示 P 点和 Q 点处的 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 截面与 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 截面；当

偏导数检测结果不稳定或不存在时，界面给出文字警示，并用红色闪烁切线提示。该设计将偏导数几何意义中的核心对象同时呈现出来，避免学生只看到计算结果而看不到概念生成过程。

表1 可视化程序功能与偏导数几何意义的对应关系

程序功能	数学对象	教学指向
函数输入与曲面生成	$z = f(x, y)$	建立二元函数图像是空间曲面的直观认识
P/Q 双点定位	$(x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1)$	突出偏导数的局部性与点依赖性
固定 y 显示 x 向截面	$z = f(x, y_0)$	说明 f_x 对应沿 x 方向的截面曲线
固定 x 显示 y 向截面	$z = f(x_0, y)$	说明 f_y 对应沿 y 方向的截面曲线
切线与斜率显示	截面曲线切线	把偏导数值解释为切线斜率
不存在警示	截面不可导	强化偏导数存在性的几何判断

2.1 曲面、截面与切线的同步呈现

程序以曲面作为整体对象，以截面曲线作为中介对象，以切线斜率作为目标对象。教师输入函数后，学生首先观察曲面形态，再通过开关显示固定变量后的截面。以 $f(x, y) = x^2 - y^2$ 为例，在 $P(1, 1)$ 处固定 $y = -1$ ，可得到 $z = x^2 - 1$ 这一截面曲线；该曲线在 $x = 1$ 处的切线斜率为 2，即 $f_x(1, -1) = 2$ 。此时学生看到的不是孤立数值，而是“在某一截面曲线上沿 x 方向上升的快慢”。

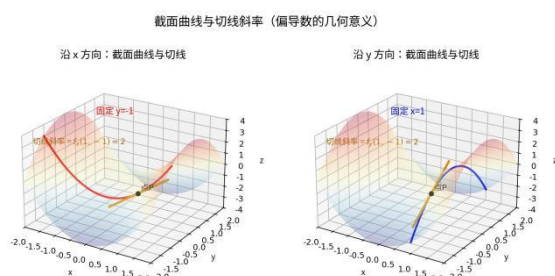
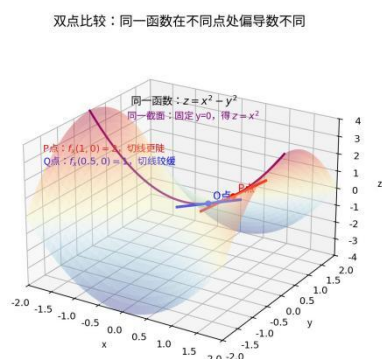


图3 截面曲线切线斜率与偏导数的对应关系

2.2 双点比较凸显局部性

程序设置 P、Q 两个点，目的不是增加视觉复杂度，而是服务于偏导数局部性的理解。对于同一函数，P 点与 Q 点的截面切线方向可能不同；对于同一点，x 向与 y 向截面的切线斜率也可能不同。学生通过比较可形成两个认识：其一，偏导数不是函数整体的固定属性，而是依赖具体点；其二，偏导数不是无方向的“曲面斜率”，而是沿某一坐标方向的瞬时变化率。

图4 P、Q 两点处 f_x 的局部性比较

2.3 数值检测服务存在性辨析

程序采用中心差分思想对偏导数存在性进行近似检测，即比较不同步长下差商的稳定性。当差商不稳定或函数值无定义时，系统将相应切线设为警示状态。这样处理并不能替代理论证明，但可在教学中引导学生进一步考察截面曲线是否在该点具有切线。通过这种方式，学生能够认识到偏导数存在性与截面曲线在对应点处的一元可导性是相关的。学生由此从“能不能求出结果”转向“是否存在确定切线”的概念判断。

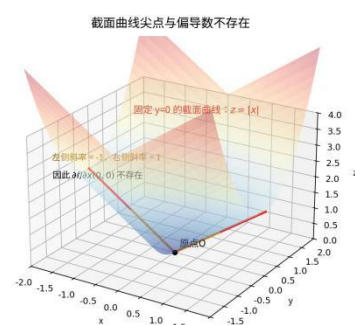


图5 截面曲线尖点与偏导数不存在示意

3 教学实施路径

3.1 教学目标与案例选择

本教学设计面向已学习一元函数导数和二元函数概念的学生。知识目标是理解偏导数的几何意义，能说明 f_x 与 f_y 分别对应哪条截面曲线的切线斜率；能力目标是能够利用三维图像解释计算结果，并在图像、符号、语言之间转换；素养目标是发展空间想象、数形结合和数学表达能力。案例函数选用 $f(x, y) = x^2 - y^2$ ，原因在于其曲面形态具有明显方向差异，便于展示固定变量截面、正负斜率和双点比较。

3.2 教学流程设计

第一，情境引入。教师以“山坡上一点向东走与向北走坡度是否相同”为问题，引出多元函数变化率必须说明方向。学生先凭生活经验认识到曲面变化具有方向差异，再进入偏导数概念。

第二，曲面观察。教师输入函数并生成曲面，要求学生描述表面上的点、函数值和自变量变化关系。此时不急于给出定义，而是让学生意识到曲面在一点处不能直接谈唯一斜率。

第三，固定变量生成截面。教师打开 x 向截面，说明固定 $y = y_0$ 后曲面与平面相交，所得曲线就是 $z = f(x, y_0)$ ；再打开 y 向截面，说明固定 $x = x_0$ 后得到 $z = f(x_0, y)$ 。通过一开一关的操作，学生能够把“固定变量”看成空间截面行为。

第四，作出切线并解释斜率。教师引导学生观察截面曲线在 P 点处的切线：切线向上表示偏导数为正，向下表示偏导数为负，水平表示偏导数为零，倾斜程度反映偏导数绝对值大小。此环节将代数结果、切线方向和局部变化率统一起来。

第五，双点比较与存在性辨析。教师打开 Q 点截面，使学生比较不同点处切线斜率的变化；再输入含绝对值的函数，观察警示提示。学生由此认识到偏导数不仅有数值大小，还涉及方向、位置和存在性条件。

3.3 学习评价设计

评价不宜只检查求导计算，而应覆盖概念表达、图像识别、表征转换和存在性判断四个维度；这种从学习活动反推评价任务的思路，也与近年来高等数学混合式教学中强调目

标、活动、反馈一致性的取向相吻合^[5-7]。

4 结语

偏导数几何意义教学的关键在于使学生理解图像背后的数学关系。本文基于三维可视化程序，通过双点比较和存在性警示强化其方向性、局部性和条件性。与书本上的静态图示相比，该教学设计能够把抽象定义转化为可操作的学习过程，让学生从“会求偏导数”进一步走向“能解释偏导数”。需要注意的是，可视化教学并不能替代严格定义与证明。演示结束后，教学重心应及时回归偏导数的概念界定与符号表达，引导学生完成由直观观察向形式化理解的转化。后续研究可基于课堂实测数据，比较该设计对学生概念理解、空间想象及解题迁移的影响，以形成更完整的多元函数微分学可视化教学证据。

[参考文献]

- [1]王洪越,张敬信,胡会荣等.基于 GeoGebra 动态交互探索偏导数几何意义[J].电子技术与软件工程,2021(17):41-42.
- [2]张敬信.基于 GeoGebra 构建高等数学动态图形化教学资源库[J].科技风,2022(3):142-144.
- [3]胡凯.数学分析课程的优化与变革研究[J].西南师范

大学学报(自然科学版),2021,46(10):159-164.

[4]赵梅妹,王晓丽,胡之英等.智慧课堂境域中“高等数学”课程的深度学习架构及框架设计与应用研究[J].科技风,2022(3):139-141.

[5]张丽,武燕.基于问题驱动-BOPPPS 教学模式在高等数学混合式教学的应用[J].高等数学研究,2021,24(1):103-106.

[6]李雪竹.基于 BOPPPS 模型下的高等数学微课教学设计——以“二重积分的概念”为例[J].渤海大学学报(自然科学版),2021,42(2):140-144.

[7]李灵晓,仲从磊,杨德五.基于 SPOC+共享学习空间的混合式课堂教学模式探索与实践[J].黑龙江教育(高教研究与评估),2022(09):36-38.

作者简介：

杨涛（1997-），男，四川南充人，助教，研究方向：差分方程。

基金项目：

教育教学改革研究项目“协同育人背景下毕业论文（设计）‘双导师’机制探索与实践”（GDJG202512）。