

运用转化思想,提升解题能力

张传军¹ 李海英² 赵海清¹ 王锦秋³

1 岭南师范学院数学与统计学院 2 青海省西宁市虎台中学 3 黔南民族师范学院数学与统计学院

DOI:10.12238/er.v4i2.3678

[摘要] 转化思想是中学阶段的重要数学思想之一。笔者从数形转化、等价转化、未知到已知转化、多元向一元转化、局部向整体转化五个方面剖析转化思想在中考中的重要作用。并在最后给出一些教学中培养学生转化思想的建议,以期为一线的数学教育工作者带来一定的启发。

[关键词] 转化思想; 解题能力; 灵活性

中图分类号: G51 **文献标识码:** A

引言

数学思想在数学大厦中具有重要地位。张奠宙和过伯祥认为数学思想方法是数学研究的一个重要组成部分,在数学学习中占有极为重要的地位,用于为数学学习奠定基础^[1]。初中阶段学生接触的数学思想包括转化思想、分类思想、数形结合思想等。其中转化思想是需要学生掌握的重要方法之一,在数学学习和数学解题中都有非常重要的作用。

目前对于转化思想及其应用也有一些研究成果。如王华军在《巧转化妙解题》中提出转化的十个具体途径^[2];在《从教学角度探讨数形转化思想》中对数形转化的教学认识进行了较为系统的探讨,并结合具体的教学环节进行深入的分析^[3]。

1 转化思想的基本含义

对于数学转化思想的界定,可将其界定为: 当一个问题直接求解比较困难时,就将这个问题由难化易,由繁化简,由陌生化熟悉得到新的问题,通过对新问题的求解,达到解决原问题的目的^[4]。

2 转化思想在解题中的具体应用

2.1 数与形的转化

数和形的转化,即是数形结合思想。学生所接触的数学问题大多都不是单纯的代数或者几何问题,而是两者的融合。合理的运用数与形的转化,能够极大提升学生的解题效率,开拓学生的解题思想。

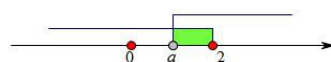
例3.1(2018贵阳中考14) 已知关于 x 的不等式组 $\begin{cases} 5-3x \geq -1 \\ a-x < 0 \end{cases}$ 无解, 则 a 的取值范围是_____。

解:

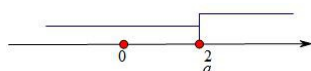
由 $5-3x \geq -1$ 得 $x \leq 2$;

由 $a-x < 0$ 得 $a < x$;

当 $a < 2$ 时, 不等式组有解, 即 $a < x \leq 2$, 如图:



当 $a = 2$ 时, 不等式组有解, 即 $x = 2$, 如图:



当 $a > 2$ 时, 不等式组无解, 如图:



综上所述: $a > 2$

解题分析: 分别解出两个不等式的解集, 再用数轴表示出解集后分类讨论即可得出答案。数轴是极好的数与形转化的代表, 用它能够很直观的帮助学生解决问题。通过用数轴表示, 学生可以清晰的把每一种情况都表示出来, 并且不易出错。

2.2 等价转化

等价转化是在解决数学问题的过程中经常使用的方法。在证明、计算、解答中都都很常见。许多题目中也常需要

借助等价转换进行题目的求解。解分式方程是典型的等价转换的例子。

例3.2(2019毕节中考22) 解方程:

$$1 - \frac{x-3}{2x+2} = \frac{3x}{x+1}$$

解: 去分母得

$$2x+2 - (x-3) = 6x$$

$\therefore x+5=6x$,

解得 $x=1$

经检验 $x=1$ 是原方程的解。

解题分析: 解分式方程的基本思想是“转化思想”, 即把分式方程转化为整式方程再进行求解。同时要注意: 验根是解分式方程的必要步骤。

2.3 未知到已知的转化

未知到已知的转化就是化未知为已知。学习新知识时通常都需要在新旧知识之间建立桥梁, 进而将新知识纳入原有的知识构架, 建构新的知识体系。

例3.3(2019毕节中考25) 某中学数学兴趣小组在一次课外学习与探究中遇到一些新的数学符号, 他们将其中某些材料摘录如下: 对于三个实数 a, b, c 用 $M\{a, b, c\}$ 表示这三个数的平均数, 用 $\min\{a, b, c\}$ 表示这三个数中最小的数。例如:

$$M\{1, 2, 9\} = \frac{1+2+9}{3} = 4, \min\{1, 2-3\} = -3$$

$\min\{3, 1, 1\} = 1$ 请结合上述材料, 解决下列问题:

$$(1) \textcircled{1} M\{(-2)^2, 2^2, -2^2\} = \underline{\quad};$$

$$\textcircled{2} \min\{\sin 30^\circ, \cos 60^\circ, \tan 45^\circ\} = \underline{\quad};$$

(2) 若 $M\{-2x, x^2, 3\}=2$, 求 x 的值;

(3) 若 $\min\{3-2x, 1+3x, -5\}=-5$, 求 x 的取值范围.

$$\text{解: (1) } \textcircled{1} M\{(-2)^2, 2^2, -2^2\} = \frac{(-2)^2 + 2^2 - 2^2}{3} = \frac{4}{3};$$

$$\textcircled{2} \min\{\sin 30^\circ, \cos 60^\circ, \tan 45^\circ\} = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\} = \frac{1}{2};$$

$$\text{故答案为: } \frac{4}{3}; \frac{1}{2};$$

$$(2) \because M\{-2x, x^2, 3\}=2,$$

$$\therefore \frac{-2x+x^2+3}{3}=2,$$

$$\text{解得 } x=-1 \text{ 或 } 3;$$

$$(3) \because \min\{3-2x, 1+3x, -5\}=-5, \therefore$$

$$\begin{cases} 3-2x \geq -5 \\ 1+3x \geq -5 \end{cases}$$

$$\text{解得 } -2 \leq x \leq 4.$$

解题分析: 本题属于新概念的题目, 出现了现阶段学生未了解的数学符号, 但其实质还是考查平均数、最小值和不等式组等知识. 解题的关键在于掌握基本知识, 学会用转化的思想思考问题, 理解新的数学符号的含义, 将其转化为已有的知识经验来解题.

2.4 多元到一元的转化

由多元到一元的转化, 也即是消元思想, 主要包括加减消元和代入消元两种方法, 是学生必须掌握的基础知识之一. 经常出现在函数或者方程类题目中.

例3.4 (2020毕节中考24第一问) 某山区不仅有美丽风光, 也有许多令人喜爱的土特产, 为实现脱贫奔小康, 某村组织村民加工包装土特产销售给游客, 以增加村民收入. 已知某种土特产每袋成本10元. 试销阶段每袋的销售价(元)与该土特产

的日销售量(袋)之间的关系如表:

x(元)	15	20	30	...
y(袋)	25	20	10	...

若日销售量 y 是销售价 x 的一次函数, 试求:

(1) 日销售量 y (袋) 与销售价 x (元) 的函数关系式;

解: 依题意, 根据表格的数据, 设日销售量 y (袋) 与销售价 x (元) 的函数关系式为 $y=kx+b$, 得 $\begin{cases} 25=15k+b \\ 20=20k+b \end{cases}$, 可以根据加减消元法或者代入消元法解得 $\begin{cases} k=-1 \\ b=40 \end{cases}$.

故日销售量 y (袋) 与销售价 x (元) 的函数关系式为: $y=-x+40$.

解题思路分析: 对于求解函数关系式类的题目, 可以先设出函数的一般式, 再根据题目信息代入方程求解函数一般式中的未知数, 进而完成函数关系式的求解.

2.5 局部向整体转化

局部向整体转化即所谓的整体法、换元法等. 在初中数学的学习中, 局部的、单元素的题目相对较多一些, 但也不乏整体思想、换元思想的体现, 有些时候运用整体思想对解题会有奇效.

例3.5 (2019贵阳中考适应性考试6) 若关于 x, y 的二元一次方程组

$$\begin{cases} 2x+y=1 \\ -x+3y=2 \end{cases} \text{ 的解是 } \begin{cases} x=a \\ y=b \end{cases}, \text{ 则 } a+4b \text{ 的}$$

值为:

$$(A) \frac{1}{7} \quad (B) \frac{19}{7} \quad (C) 1 \quad (D) 3$$

解题分析: 本题的常规解法是将

$$\begin{cases} x=a \\ y=b \end{cases} \text{ 代入原方程, 进而求出 } a, b \text{ 的}$$

具体的值, 最后再求解出 $a+4b$. 步骤相对麻烦, 并且若计算不细心还可能出错. 若采用整体法的思想, 直接求解 $a+4b$

则过程就简化了许多, 一步就可以得到结果. 可将原方程组中的上下两式相加, 即可得到 $a+4b=3$, 解答过程十分简便.

3 总结

总体而言, 转化思想普遍存在于各种数学问题中, 充分理解和掌握转化思想对促进学生数学解题效率的提升具有积极影响.

教师要重视培养学生有效应用转化思想解答数学问题的能力, 同时在实际应用的过程中, 教师应引导学生对转化思路及方式加以设计, 避免出现解题失误.

在日常的数学教学过程中, 教师要灵活的结合实际情况, 创设相应的学习情境、问题情境等, 让学生可以去学生感悟、运用数学思想, 让他们感受到转化思想的魅力, 感受到数学思想的美丽, 激发学生的学习兴趣.

[基金项目]

教育部产学合作协同育人项目 (201802151033); 广东省科技计划项目 (2017A030303085); 岭南师范学院人才专项 (ZL2037); 湛江市海洋经济运行监测与统计项目 (ZHMZ-CG-2019-039).

[参考文献]

- [1] 张奠宙, 过伯祥著. 数学方法论稿 [M]. 上海: 上海教育出版社, 1996: 8-9.
- [2] 王华军, 陈德前. 巧转化妙解题 [J]. 数理化学学习 (初中版), 2018(5): 23-25.
- [3] 从品. 从教学角度探讨数形转化思想 [D]. 苏州大学, 2012.
- [4] 王欣. 转化思想在高中数学教学中的应用研究 [D]. 洛阳师范学院, 2020.

作者简介:

张传军 (1979--), 男, 汉族, 吉林敦化人, 博士, 教授, 岭南师范学院数学与统计学院, 研究方向: 数学教育.

赵海清 (1979--), 男, 汉族, 四川南充人, 博士, 讲师, 岭南师范学院数学与统计学院, 研究方向: 金融统计、数据分析.