教育研究
第 4 卷◆第 5 期◆版本 1.0◆2021 年
文章类型：论文|刊号（ISSN）：2630-4686 /（中图刊号）：380GL020

不定方程的求解

刘佳蕊　朱继娥　赵院娥*

DOI:10.12238/er.v4i5.3869

[摘　要] 通过利用简单同余法,因式分解法以及分类讨论法研究了不定式方程 $x^3+1=3069y^2$ 的整数解问题,得到不定方程有且只有平凡解 $(x,y)=(-1,0)$。

[关键词] 整数解；同余方程；不定方程的求解
中图分类号：G21　文献标识码：A

The Solution of Indefinite Equation

Jiarui Liu　Ji'e Zhu　Yuan'e Zhao*

[Abstract] By using simple congruence method, factorization method and classification discussion method, this paper studies the integer solution of the indefinite equation, and obtains that the indefinite equation has and only has trivial solution.

[Key words] integer solution; congruence equation

引言

形如 $x^3+1=Dy^2\left(D>0\right)$ 的不定方程在数论中扮演着重要的角色。不定方程是变数个数多于方程个数,且取整数值的方程。不定方程的整数解问题是数论的一个重要课题,我国古代数学家在这方面的研究内容极为丰富,在数学史上占有重要地位。自其出现以来便引起了广大数学爱好者的浓厚兴趣。例如陈雨君证明了方程 $x^3+1=959y^2$ 仅有整数解 $(x,y)=(-1,0)$。在上述基础上,本文研究不定方程时方程解的情况。

引理1:方程 $x^2-x+1\equiv 0\left(\mathrm{mod}9\right)$ 无整数解。

引理2:不定方程 $x^2-x+1=y^2$ 有且仅有整数解 $(x,y)=(1,\pm1),(0,\pm1)$。

定理及证明

定理

不定方程 $x^3+1=3069y^2$ 有且仅有平凡整数解 $(-1,0)$。

证明:

由题可知 $(-1,0)$ 显然是方程的解。

因为 $\left(x^3+1\right)=\left(x+1\right)\left(x^2-x+1\right)$,

$\left(x+1,x^2-x+1\right)=\left(x+1,(x+1)^2-3(x+1)+3\right)=\left(x+1,3\right)=1$或$3$

所以分4种情况来讨论:

情形(1)

$x+1=3069a^2,x^2-x+1=b^2,y=ab$;

情形(2)

$x+1=a^2,x^2-x+1=3069b^2,y=ab$;

情形(3)

$x+1=341a^2,x^2-x+1=9b^2,y=ab$;

情形(4)

$x+1=27621a^2,x^2-x+1=b^2,y=3ab$。

情形(1)由引理2可知不定方程无整数解。

情形(2)分俩种情况讨论。

(1)当x为偶数:由一式知a为奇数,有 $a^2=1(mod8)$,故得 $x=a^2-1\equiv 0(mod8)$,将其代入第一式的左边可得 $x^2-x+1\equiv 1(mod8)$。又因为 $x^2-x+1=3069b^2$,所以b为奇数,有 $b^2\equiv 1(mod8)$,$3069b^2\equiv 5(mod8)$,因此有

$1\equiv x^2-x+1=3069b^2\equiv 5\left(mod8\right)$,

文章类型：论文|刊号（ISSN）：2630-4686 /（中图刊号）：380GL020

上述同余方程矛盾，所以当x为偶数时无解。

(2)当x为奇数：由一式可知a为偶数，从而有 $a^2 \equiv 4(mod 8)$ 或 $a^2 \equiv 0(mod 8)$。

(i)当 $a^2 \equiv 4(mod 8)$ 时：

$x = a^2 - 1 \equiv 3(mod 8)$，将其带入二式 $x^2 - x + 1 = 3069b^2 \equiv 7(mod 8)$。又因为 $x^2 - x + 1 = 3069b^2$ 是奇数，因此b为奇数，可得 $b^2 \equiv 1(mod 8)$。但 $3069b^2 \equiv 5(mod 8)$，因此有 $7 \equiv x^2 - x + 1 = 3069b^2 \equiv 5(mod 8)$，所以可知上式矛盾。

(ii)当 $a^2 \equiv 0(mod 8)$ 时：将 $x = a^2 - 1$ 代入第二个方程就可以得出 $(a^2-1)^2 - (a^2-1) + 1 = 3069b^2$，化解得 $(2a^2-3)^2 + 3 = 3069(2b)^2$，故可得 $(2a^2-3)^2 \equiv 0(mod 3)$，①又因 $a^2 \equiv 0(mod 8)$，代入可得 $(2a^2-3)^2 \equiv 1(mod 8)$ ②，所以由同余方程①可得 $(2a^2-3)^2 = 3k_1$，③由同余方程②可得 $(2a^2-3)^2 = 8k_2 + 1$ ④，③④联立方程组，计算可得 $\begin{cases} k_1 = 1 \\ k_2 = 1 \end{cases}, \begin{cases} k_1 = 27 \\ k_2 = 10 \end{cases} \cdots$，代入③式中可得解依次为

$2a^2 - 3 = 3, 9, 15, 21, 27, 35 \cdots$ ⑤。因 $(2a^2-3)^2 + 3 = 3069(2b)^2$，

$b^2 = \dfrac{(2a^2-3)^2 + 3}{3069 \times 4}$。由⑤计算得b为偶数。初始计算知b为奇数，矛盾，所以当x为奇数时同余方程无解。综上可知，原不定方程没有整数解。

情形(3)已知 $x^2 - x + 1 = 9b^2$，由引理1知方程无整数解，故该情形下不定方程无整数解。

情形(4) $x + 1 \equiv 0(mod 3)$，$x \equiv 2(mod 3)$，将其代入二式的左边得 $b^2 \equiv 0(mod 3)$，但由于3不能整除1，故 $b^2 \equiv 0(mod 3)$，$b^2 \equiv 0(mod 9)$，$x^2 - x + 1 = b^2 \equiv 0(mod 9)$ 引理1知方程无整数解，故方程无整数解。

结论

综上所述，不定方程 $x^3 + 1 = 3069y^2$ 有且仅有平凡整数解(-1, 0)。

[基金项目]

延安大学2019年大学生创新训练项目(D2019145)。

[参考文献]

[1]周科，陈雨君.关于丢番图方程 $x^3 + 1 = 959y^2$ [J].广西师范学院学报,2018,35(4):33－35.

[2]Weger B M A diophantine equation of antoniadis[J].Number Theory and Applications,1988(10):575-589.

[3]曹珍富.丢番图方程引论[M].哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,1989.

作者简介：

刘佳蕊(1998–),女,汉族,陕西省延安市,延安大学数学与计算机科学学院学生,研究方向：数学与应用数学。