第 5 卷◆第 8 期◆版本 1.0◆2022 年
文章类型：论文|刊号（ISSN）：2630-4686 /（中图刊号）：380GL020

关于不定积分分部积分法的教学探讨

马艳丽　潘娟娟
安徽新华学院 通识教育部
DOI:10.12238/er.v5i8.4804

[摘　要] 不定积分是高等数学中的重要内容,分部积分法是求解不定积分中最基本的方法之一,常用于被积函数为两种不同类型函数乘积的积分。对学生来说这既是难点也是易错点,但其使用是有一定技巧的,如能灵活运用往往能够化难为易。本文结合自己近几年的教学实践总结了分部积分法中函数u,v的选择口诀,以及分部积分法主要解决的几种典型题型,并通过例题给予说明。
[关键词] 不定积分；分部积分法；深化应用
中图分类号：G424.1　文献标识码：A

Discussion on the Teaching of Indefinite Integral by Parts

Yanli Ma　Juanjuan Pan
Department of General Education, Anhui Xinhua University

[Abstract] Indefinite integral is an important content in higher mathematics. Integration by parts is one of the most basic methods to solve indefinite integral. It is often used for integral where the integrand is the product of two different types of functions. For students, this is not only a difficult point but also a mistake, but its use has certain skills. If it can be flexibly used, it can often turn the difficult into easy. Based on my teaching practice in recent years, this paper sums up the pithy formula for the selection of functions u and v in the partial integration method, as well as several typical problem types mainly solved by the partial integration method, and gives explanations through examples.
[Key words] indefinite integral; integration by parts; deepen application

《高等数学》是所有本科院校理工类、经管类学生的必修基础课,积分学是其中的重要内容,分部积分法是积分学中必不可少的一种积分方法,也是不定积分教学中的一个重点内容。在多年的教学实践中,对分部积分法的教与学有了一些自己的教学做法[1-3],下面结合典型例题对分部积分法作以简单阐述。

1 不定积分的分部积分公式

设$u=u(x),v=v(x)$都是可微函数,且具有连续的导函数$u'(x)$，$v'(x)$,根据乘积函数的微分(或求导)公式,有

$$\left[u(x)v(x)\right]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$$

移项得

$$u(x)v'(x)=\left[u(x)v(x)\right]'-u'(x)v(x)$$

两边积分,即得

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x=u(x)v(x)-\int u'(x)v(x)\mathrm{d}x \quad (1)$$

也可简记为

$$\int u(x)\mathrm{d}v(x)=u(x)v(x)-\int v(x)\mathrm{d}u(x) \quad (2)$$

式(1)或(2)称为不定积分的分部积分公式。利用公(1)或(2)求不定积分的方法称为分部积分法[4,5]。

注：(1)选择选取$u,\mathrm{d}v$的一般原则：1) v要容易求得；2)积分$\int v\mathrm{d}u$要比积分$\int u\mathrm{d}v$容易积出.

(2)能用分部积分法求解的积分类型：分部积分法用来解决两类不同性质函数乘积的积分问题,通常适用于下列积分

$$\int x^m\ln^n x\mathrm{d}x,\quad \int x^m e^{ax}\mathrm{d}x,\quad \int x^m\sin ax\mathrm{d}x,$$

$$\int x^m\cos ax\mathrm{d}x,\quad \int e^{ax}\sin bx\mathrm{d}x,$$

教育研究
第 5 卷◆第 8 期◆版本 1.0◆2022 年
文章类型：论文|刊号（ISSN）：2630-4686 /（中图刊号）：380GL020

$\int e^{ax}\cos bx\mathrm{d}x,\ \int x^m\arcsin x\mathrm{d}x,\ \int x^m\arctan x\mathrm{d}x$

等等。

(3) 分部积分时, 选取 u,v' 的一般规律(口诀)：幂乘三角、幂乘指数, 幂不凑；幂乘反三角、幂乘对数, 幂要凑； 幂乘指数, 随意凑；多次分部时前、后步调应一致。

2 不定积分分部积分法的深化应用

(1) 同一题目经多次使用分部积分后积分还原, 利用解不定积分方程, 求出不定积分。

例1. 求 $\int e^{2x}\cos 3x\mathrm{d}x$.

解 $\int e^{2x}\cos 3x\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int e^{2x}\mathrm{d}\sin 3x$

$=\frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x-\frac{1}{3}\int \sin 3x\mathrm{d}e^{2x}$

$=\frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x-\frac{2}{3}\int e^{2x}\sin 3x\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x+\frac{2}{9}\int e^{2x}\mathrm{d}\cos 3x$

$=\frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x+\frac{2}{9}e^{2x}\cos 3x-\frac{4}{9}\int e^{2x}\cos 3x\mathrm{d}x$

解方程得：

$$\int e^{2x}\cos 3x\mathrm{d}x=\frac{(3\sin 3x+2\cos 3x)e^{2x}}{13}+C$$

(2) 分部积分法比较灵活、特殊情况下一定要合理的选择 $u,\mathrm{d}v$, 同时应注意和别的求积分方法结合使用方能锦上添花。

例2. 求 $\int \cos x e^{\sqrt{\sin x}}\mathrm{d}x$.

解 $\int \cos x e^{\sqrt{\sin x}}\mathrm{d}x=\int e^{\sqrt{\sin x}}\mathrm{d}\sin x$

令 $\sqrt{\sin t}=u$

$=2\int ue^u\mathrm{d}u\ =2\int u\mathrm{d}e^u$

$=2(ue^u-\int e^u du)$

$=2(u-1)e^u+C$

$=2(\sqrt{\sin x}-1)e^{\sqrt{\sin x}}+C$

(3) 利用分部积分法可以得到许多不定积分的递推公式, 在计算其他积分时作为公式可以直接应用。

例3. 求 $I_n=\int\frac{1}{(u^2+a^2)^n}\mathrm{d}u$, 其中 $a>0$, n 为正整数。

解当 $n=1$ 时,

$$I_1=\int\frac{1}{u^2+a^2}\mathrm{d}u=\frac{1}{a}arcan\frac{u}{a}+C.$$

当 $n>1$ 时, 应用分部积分法可建立 I_{n-1} 与 I_n 的关系：

$$I_{n-1}=\int\frac{1}{(u^2+a^2)^{n-1}}\mathrm{d}u$$

$$=\frac{u}{(u^2+a^2)^{n-1}}+2(n-1)\int\frac{u^2}{(u^2+a^2)^n}\mathrm{d}u$$

$$=\frac{u}{(u^2+a^2)^{n-1}}+2(n-1)\int\left(\frac{1}{(u^2+a^2)^{n-1}}-\frac{a^2}{(u^2+a^2)^n}\right)\mathrm{d}u$$

$$=\frac{u}{(u^2+a^2)^{n-1}}+2(n-1)(I_{n-1}-a^2I_n),$$

从上式中得

$$I_n=\frac{1}{2a^2(n-1)}\left(\frac{u}{(u^2+a^2)^{n-1}}+(2n-3)I_{n-1}\right)$$

$(n=2,3,\cdots)$.

这就是 I_n 的递推公式, 由此公式便可由 I_1 逐步求得 $I_n(n=2,3,\cdots)$. 。

(4) 有的题目分部积分时需采用“一动一静”的积分原则, 产生抵消现, 从而求出积分。具体的就是将原积分拆项后, 对其中一项分部积分一次以抵消另一项, 这是求不定积分时的常用技巧之一, 计算时应多加注意。

例4. 求 $\int e^{2x}(1+\tan x)^2\mathrm{d}x$.

解

$$\int e^{2x}(1+\tan x)^2\mathrm{d}x=\int e^{2x}(1+\tan^2 x+2\tan x)\mathrm{d}x$$

文章类型：论文|刊号（ISSN）：2630-4686 /（中图刊号）：380GL020

$$=\int e^{2x}\sec^2 x\mathrm{d}x+2\int e^{2x}\tan x\mathrm{d}x$$

$$=\int e^{2x}\mathrm{d}\tan x+2\int e^{2x}\tan x\mathrm{d}x$$（一动一静分部积分）

$$=e^{2x}\tan x-\int \tan x\cdot 2e^{2x}\mathrm{d}x+2\int e^{2x}\tan x\mathrm{d}x$$（产生抵消）

$$=e^{2x}\tan x+C$$。

(5)有的题目分部积分时需采用“双面夹击”的积分原则，产生抵消，从而求出积分。具体的就是将原积分拆成两项后，各自经过分部积分一次后，将未积出的部分相互抵消，这也是求不定积分时的常用技巧之一，学习时应多加小心。

例5. 求 $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}\mathrm{d}x$.

解 $$\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}\mathrm{d}x=\int \frac{(x+1)e^x-e^x}{(x+1)^2}\mathrm{d}x$$

$$=\int \frac{e^x}{x+1}\mathrm{d}x-\int \frac{e^x}{(x+1)^2}\mathrm{d}x$$

$$=\int \frac{e^x}{x+1}\mathrm{d}x+\int e^x\mathrm{d}\frac{1}{x+1}$$

$$=\int \frac{e^x}{x+1}\mathrm{d}x+\frac{e^x}{x+1}-\int \frac{e^x}{x+1}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{e^x}{x+1}+C$$

3 结束语

通过以上解题思路的探索，通过简单易记的口诀，掌握分部积分法的结构和特点，再多进行一些练习，举一反三，即使被积函数比较复杂，也能够比较顺利地选择函数u，从而求出积分结果。学生掌握了这种求积分的方法，就会感觉到用分部积分法求积分是件愉快有趣的事情，大大提高了学生学习的积极性和有效性。

[基金项目]

安徽省质量工程项目“高等数学C”线下课程(2021xxkc079)；安徽省质量工程项目“高等数学课程思政示范课程”(2021kcszsfkc192)；安徽省教育厅教育教学研究项目(2020jyxm0813,2020jyxm0735)。

[参考文献]

[1]胡珍妮,代雪珍,肖楠.不定积分中分部积分法的教学设计[J].读与写杂志,2018,15(12):36-37.

[2]罗琼.不定积分的分部积分法教学浅谈[J].商丘职业技术学院学报,2012,11(05):15-18.

[3]上宏昌.关于不定积分的分部积分法运算技巧[J].廊坊师范学院学报(自然科学版),2014,14(04):19-22.

[4]张卓奎,王金金.高等数学(上册)[M].第3版.北京:北京邮电大学出版社,2017:168-174.

[5]同济大学数学系.高等数学(上册)[M].第六版.北京：高等教育出版社,2013:158-164.

作者简介：

马艳丽(1983--),女,汉族,安徽宿州人,硕士研究生,安徽新华学院副教授,从事数学方面的研究。