教育研究
Education Research
第 5 卷◆第 11 期◆版本 1.0◆2022 年
文章类型：论文|刊号（ISSN）：2630-4686 /（中图刊号）：380GL020

伽玛函数在概率论与数理统计教学中的应用

梁静　潘娟娟
安徽新华学院通识教育部
DOI:10.12238/er.v5i11.4852

[摘　要] 伽玛函数是高等数学积分计算中常用的工具。文章介绍了伽玛函数与贝塔函数的定义及性质，给出了两函数之间的关系,并将其应用到概率论相关积分计算中。最后推导了伽马分布和卡方分布的关系,这些研究将高等数学与概率论相联系,拓宽了学生的知识面。
[关键词] 伽玛函数；贝塔函数；伽玛分布；卡方分布
中图分类号：G4　文献标识码：A

The Application of Gamma Function in the Teaching of Probability Theory and Mathematical Statistics

Jing Liang　Juanjuan Pan
Division of General Education, Anhui Xinhua University

[Abstract] Gamma functions are commonly used tools in advanced mathematical integral calculations. This paper introduces the definition and properties of gamma function and beta function, gives the relationship between the two functions, and applies them to the calculation of correlation integrals in probability theory. Finally, the relationship between gamma distribution and Chi−square distribution is derived. These studies link higher mathematics with probability theory, and broaden students' knowledge.
[Key words] gamma function; beta function; gamma distribution; Chi−square distribution

在《概率论与数理统计》教学中,关于连续型随机变量概率分布讨论时经常遇到积分问题,特别是含有 e^{-x} 或 e^{-x^2} 之类的广义积分,此类积分计算较难。我校概率论与数理统计课程开设与大学二年级上册[1],学生刚学完高等数学[2],本身对积分的计算就很困惑,加上学科目的转变使得计算的精确度受到极大影响。为了解决积分计算的问题,许多学者研究了伽马函数在积分中的应用[3,4],介绍了许多积分计算技巧。我们在这些研究的基础上将伽玛函数计算技巧进一步应用到概率论的相关教学中,取得了较好的学习效果。

1 伽玛函数

定义1：含参变量的积分 $\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ 称为伽玛函数,即

$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$$

伽玛函数也称为第二类Euler积分.

性质1：伽玛函数在 $(0,+\infty)$ 上连续.

证明：

$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt=\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt+\int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$$

对 $\forall\beta>\alpha>0$,当 $\alpha\le x\le\beta$, $0<t\le 1$ 时,有不等式

$$t^{x-1}e^{-t}<t^{\alpha-1}$$

而积分 $\int_0^1 t^{\alpha-1}dt=\frac{1}{\alpha}$ 收敛,故积分 $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛；又当 $\alpha\le x\le\beta$, $1<t\le+\infty$ 时,有不等式

$$t^{x-1}e^{-t}<t^{\beta-1}e^{-t}$$

而积分 $\int_1^{+\infty} t^{\beta-1}e^{-t}dt$ 收敛,于是积分 $\int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛.

综上,积分 $\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛,而被积函数 $t^{x-1}e^{-t}$ 在 $t\in(0,+\infty);x\in[\alpha,\beta]$ 上连续,所以 $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上连续. 由 α,β 的任意性, $\Gamma(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续.

性质2：当 $x>0$ 时，有 $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$.

证明：由分部积分

$$\Gamma(x+1)=\int_0^{+\infty}t^x e^{-t}dt=-t^x e^{-t}\Big|_0^{+\infty}+x\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}dt=x\Gamma(x)$$

特别地，取 $x=n\in N^+$ ，有 $\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=\cdots=n!$.

因此有：积分 $\int_0^{+\infty}x^n e^{-x}dx=n!$

定义2：称含参变量的积分 $B(x,y)=\int_0^{+\infty}\frac{t^y}{(1+t)^{x+y}}dt$ 为贝塔 B (Beta)函数.

性质3：对 $\forall x,y>0$ ，有 $B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$

证明：

$$\Gamma(x)\Gamma(y)=\int_0^{+\infty}u^{x-1}e^{-u}du\cdot\int_0^{+\infty}v^{y-1}e^{-v}dv$$

$$=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-(x+y)}u^{x-1}v^{y-1}dudv$$

令 $u=\frac{s}{1+t}$ ， $v=\frac{st}{1+t}$

则

$$\Gamma(x)\Gamma(y)=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-s}s^{x+y-1}\frac{t^{y-1}}{(1+t)^{x+y}}dsdt=\Gamma(x+y)B(x,y)$$

所以 $B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$.

性质4：(余元公式)对 $\forall x\in(0,1)$ ，有 $\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x}$.

证明：由性质3 $B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ 中，令 $y=1-x$ ，即得

$$B(x,1-x)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(1-x)}{\Gamma(1)}$$

而，则 $\Gamma(x)\Gamma(1-x)=B(x,1-x)=$

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-s}\frac{t^{-x}}{1+t}dsdt=\int_0^{+\infty}\frac{t^{-x}}{1+t}dt=\frac{\pi}{\sin\pi x}.$$

如果在余元公式中，令 $x=\frac{1}{2}$ ，即得 $\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(1-\frac{1}{2})=\pi$ ，故 $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$.

例1用伽玛函数计算概率积分 $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$.

解：令 $x^2=t$ ，则

$$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\int_0^{+\infty}\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{2}e^{-t}dt=\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

2 伽玛函数在概率中的应用

(1)设随机变量服从参数为 θ 的指数分布，其概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

求 EX,EX^2 .

解： $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^{+\infty}\frac{x}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}dx$

$$=\theta\int_0^{+\infty}\frac{x}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}d\frac{x}{\theta}=\theta\Gamma(2)=\theta$$

$$EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}dx$$

$$=\theta^2\int_0^{+\infty}\left(\frac{x}{\theta}\right)^2e^{-\frac{x}{\theta}}d\frac{x}{\theta}=\theta^2\Gamma(3)=2\theta^2$$

(2)设随机变量 X 服从参数为 α 的麦克斯韦分布，其概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{4}{\alpha^3\sqrt{\pi}}x^2e^{-\frac{x^2}{\alpha^2}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

求 EX .

解： $EX=\int_0^{+\infty}x\cdot\frac{4}{\alpha^3\sqrt{\pi}}x^2e^{-\frac{x^2}{\alpha^2}}dx$

$$=\frac{4}{\alpha^3\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}x^3e^{-\frac{x^2}{\alpha^2}}dx=\frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}}\Gamma(2)=\frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}}.$$

(3)设随机变量 $X\sim N(0,1)$ ，求 X 的 k 阶原点矩 EX^k . $k=1,2,3,\cdots,n$

解：标准正态分布的密度函数为 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ ，则

当 k 为奇数时， $EX^k=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^k}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=0$ ；

当 k 为偶数时,

$$EX^k = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^k}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} x^{k-1} e^{-\frac{x^2}{2}} d\frac{x^2}{2}$$

令 $\frac{x^2}{2} = u$，则

$$EX^k = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} 2^{\frac{k-1}{2}} \cdot u^{\frac{k-1}{2}} e^{-u} du = \frac{2^{\frac{k}{2}}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) = (k-1)!!,$$

综上, $EX^k = \begin{cases} 0, & k\text{为奇数} \\ (k-1)!!, & k\text{为偶数} \end{cases}$.

3 伽玛分布与卡方分布

设随机质点流的计数过程 $\{X_t, t \geq 0\}$ 是强度为 θ 的 Poisson过程, 以 Z_1 表示第一个质点到来的时刻, 其分布为

$$P(Z_t > t) = P(X_t = 0) = e^{-\frac{t}{\theta}} \quad , \quad t > 0$$

所以, Z_1 的分布就是参数为 θ 的指数分布.

下面考虑第 r 个质点到来的时刻的分布.

如果在强度为 θ 的Poisson过程 $\{X_t, t \geq 0\}$ 中, 以 Z_r 表示第 r 个质点到来的时刻, 那么, $t > 0$ 对事件 $(Z_r \leq t)$ 表示第 r 个质点到来不迟于时刻 t , 而事件 $X_r \geq r)$ 表示到时刻 t 止, 到来的质点数量不少于 r 个, 所以, 这两个事件相等, 即

$$F_r(t) = P(Z_r \leq t) = P(Z_r \geq r) = e^{-\frac{t}{\theta}} \sum_{k=r}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{\theta}\right)^k}{k!}, t > 0$$

两边求导, 得

$$p_r(t) = \frac{d}{dt} F_r(t) = e^{-\frac{t}{\theta}} \sum_{k=r}^{\infty} \frac{t^{k-1}}{\theta^k (k-1)!}$$

$$- e^{-\frac{t}{\theta}} \sum_{k=r}^{\infty} \frac{t^k}{\theta^{k+1} k!} = e^{-\frac{t}{\theta}} \frac{t^{r-1}}{\theta^r (r-1)!}, t > 0$$

$p_r(t)$ 是一个概率密度函数, 将其写成

$$p(x) = \frac{x^{r-1}}{\theta^r \Gamma(r)} e^{-\frac{x}{\theta}}$$

我们称上式 $p(x)$ 作为密度函数的连续型分布为以 $\theta > 0$; $r > 0$ 为参数的 Γ 分布, 记为 $\Gamma(\theta, r)$.

特别地取 $\theta = 2, r = \frac{n}{2}$ 的 Γ 分布在数理统计中具有重要意义, 即自由度为 n 的 χ^2 分布.

4 结束语

通过讨论使得学生不仅巩固了先修课程高等数学中的伽玛函数相关知识点, 也使得学生对概率论中含有或之类的广义积分计算更加快捷。数理统计中的三大抽样分布卡方分布、分布及分布都与伽玛分布有关, 经过实际教学进行学科融合, 使得学生进一步发散已学知识点, 用已知研究新知既提高了学生的探究能力又增强了学生的学科融合能力。经过教学实施发现学生接受较好, 取得良好的教学效果。

[基金项目]

安徽省教育厅质量工程教学研究重点项目(2021jyxm0608); 安徽省教育厅质量工程教学研究重点项目(2020jyxm0804); 安徽省教育厅质量工程教学研究重点项目(2022jyxm658); 安徽新华学院质量工程教学研究重点项目(2021jy009)。

[参考文献]

[1]盛骤,谢式千,潘承毅.概率论与数理统计[M].第3版.北京:高等教育出版社,2006.

[2]常庚哲,史济怀.数学分析教程(上册,第3版)[M].中国科学技术大学出版社,2012.

[3]胡淑荣.函数及应用[J].哈尔滨师范大学学报,2002,18(4):12-15.

[4]刘恒,李冠军.数学分析教学中欧拉积分的推广及应用[J].湖北第二师范学院学报,2019,36(08),87-91.

作者简介:

梁静(1986--),女,汉族,安徽蒙城人,硕士,副教授,研究方向:代数编码与密码。