教育研究
Education Research
第 3 卷◆第 3 期◆版本 1.0◆2020 年
文章类型：论文|刊号（ISSN）：2630-4686

引而伸之，触类而长之——画对角线解平行四边形、矩形、菱形的存在性问题

张晓磊
金华市第十五中学
DOI:10.32629/er.v3i3.2537

[摘 要] 初三复习阶段,学生面临的题型众多,如何让学生通过解一道题学会解一类题,使学生高效学习,是本文的出发点。本文以四边形的存在性问题为例,探索使用“归纳总结”法让学生举一反三、一会多会。另外,对于四边形的存在性问题,学生常会出现考虑不全面而漏解,即使能考虑到所有情况,因作图繁琐或不规范而影响思路及解答。本文采用“画对角线的方法”通过数形结合,用代数知识解决几何问题,解决了直角坐标系中的平行四边形、矩形、菱形的存在性这一类问题。
[关键词] 四边形；存在性；数形结合；分类思想

《义务教育数学课程标准》提出了在各学段中,安排了“数与代数”“图形与几何”“统计与概率”“综合与实践”四个部分内容,其中“综合与实践”内容设置的目的在于“培养学生综合运用有关的知识与方法解决实际问题,培养学生的问题意识、应用意识和创新意识,积累学生的活动经验,提高学生解决现实问题的能力”。

也就是说,在日常教学实践中,首先通过恰当的归纳,使学生理解知识、掌握技能、积累经验、感悟思想；其次通过反复的思考和积累,就同一问题情境提出不同层次的问题或开放性问题,让学生获得某一知识技能的同时,触类旁通,举一反三,解决相关的、相似的问题,这样还可以激发学生的学习兴趣。

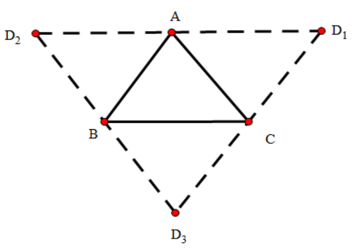
本文通过代数的方法,数形结合,使用“画对角线的方法”,让学生学会合理分类,结合四边形的性质解决直角坐标系中的平行四边形、矩形、菱形的存在性这一类问题。

1 预备知识

1.1平行四边形存在性问题的分类依据

已知△ABC,在平面内找一点D,使得这四个点构成的四边形是平行四边形。

如图,这样的点D有3个。(分别以AB、AC、AD为对角线可全面考虑问题)。

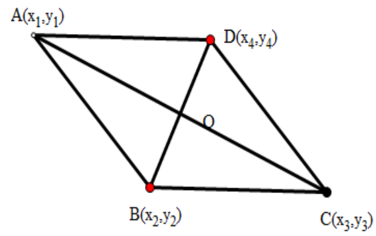


1.2平行四边形顶点坐标之间的关系

平行四边形有对角线互相平分的性质,即对角线的交点O既是AC的中点,也是BD的中点。利用中点坐标公式得:

$$\begin{cases} \dfrac{x_1+x_3}{2}=\dfrac{x_2+x_4}{2} \\ \dfrac{y_1+y_3}{2}=\dfrac{y_2+y_4}{2} \end{cases}$$

即 $\begin{cases} x_1+x_3=x_2+x_4 \\ y_1+y_3=y_2+y_4 \end{cases}$



1.3两点之间距离公式

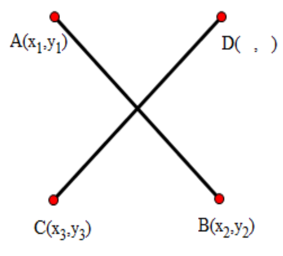
如上图, $AB=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$.

2 基本题型

以“画对角线的方法”总结归纳了以二次函数为载体的三种基本题型解决平行四边形的存在性问题,在此基础上将问题拓展以解决直角坐标系中平行四边形、矩形、菱形的存在性问题。

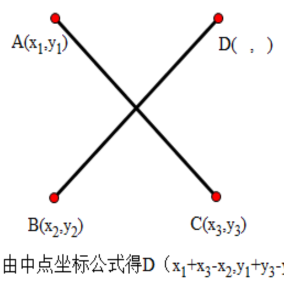
题型一：已知三点 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$,求点D使得A、B、C、D四点构成平行四边形。

以AB为对角线



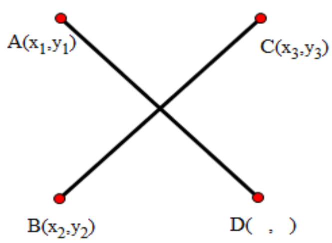
由中点坐标公式得D（$x_1+x_2-x_3,y_1+y_2-y_3$）

以AC为对角线



由中点坐标公式得D（$x_1+x_3-x_2,y_1+y_3-y_2$）

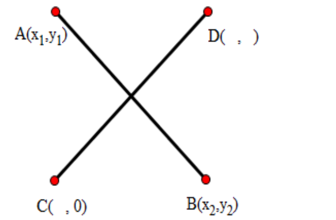
以AD为对角线



由中点坐标公式得D（$x_2+x_3-x_1,y_2+y_3-y_1$）

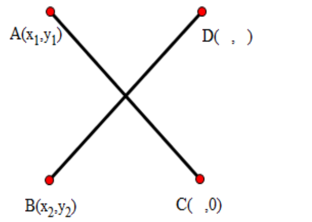
题型二：已知两点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，点C在x轴上，点D在抛物线上，求点D使得A、B、C、D四点构成平行四边形。如例1。

以AB为对角线



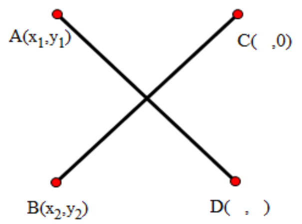
由点C的已知纵坐标求出点D的纵坐标y_1+y_2，代入抛物线解析式求出点D的横坐标。

以AC为对角线



由点C的已知纵坐标求出点D的纵坐标y_1-y_2，代入抛物线解析式求出点D的横坐标。

以AD为对角线



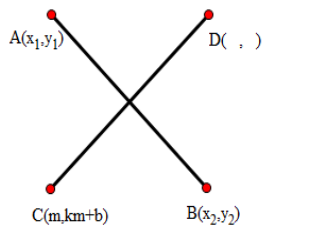
由点C的已知纵坐标求出点D的纵坐标y_2-y_1，代入抛物线解析式求出点D的横坐标。

说明：当点C在y轴上，在抛物线的对称轴上（如例3）或在与坐标轴平行的某条已知直线上时，类似的思路讨论。

题型三：已知两点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，点C在直线y=kx+b上，点D在抛物线上，求点D使得A、B、C、D四点构成平行四边形。如例2。

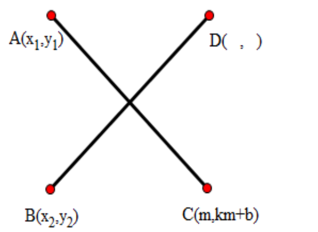
设C(m, km+b)

以AB为对角线



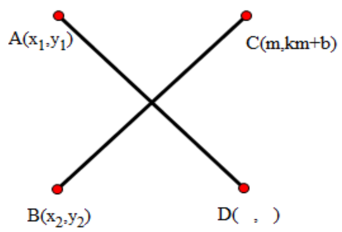
由中点坐标公式得D（x_1+x_2-m,y_1+y_2-km-b）代入抛物线求出未知数m.

以AC为对角线



由中点坐标公式得D（x_1+m-x_2,$y_1+km+b-y_2$）代入抛物线求出未知数m.

以AD为对角线



由中点坐标公式得D（x_2+m-x_1,$y_2+km+b-y_1$）代入抛物线求出未知数m.

说明：用字母表示看上去比较复杂，实际计算量并不大。

拓展题型：

(1)当A、B、C、D四点构成矩形时，只需利用两点间距离公式增加条件（对角线长度相等）进行验证或计算。如例3。

当A、B、C、D四点构成菱形时，只需利用两点间距离公式增加条件（邻边长度相等）进行验证或计算。如例4。

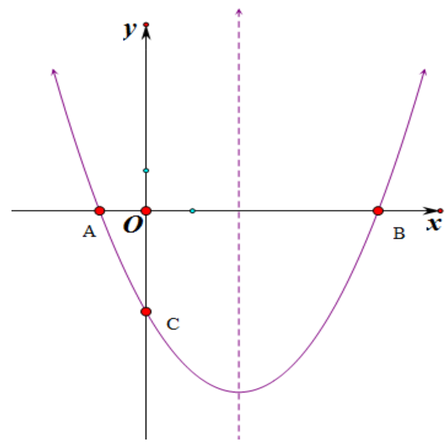
(2)对于不以二次函数为载体的四边形的存在性问题以上方法同样适用，如例4。

(3)当题目所给四个点中只有一个已知点时，思考方法类似，只需设出容易表示的两个点的坐标（通常设两个未知数），用中点坐标公式表示出第四个点的坐标，找等量关系列方程组即可。

3 例题展示

本节通过下面四道例题，展示如何将上述解题方法应用到实战解题过程中。

例1：如图，抛物线经过A(-1,0)，B(5,0)，$C(0,-\frac{5}{2})$ 三点。



(1)求抛物线的解析式；

(2)在抛物线的对称轴上有一点P，使PA+PC的值最小，求点P的坐标；

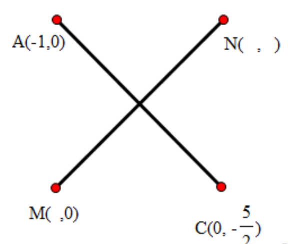
(3)点M为x轴上一动点，在抛物线上是否存在一点N，使以A、C、M、N四点构成的四边形为平行四边形？若存在，求点N的坐标；若不存在，请说明理由。

解：(1) $y=\frac{1}{2}x^2-2x-\frac{5}{2}$（过程略）

(2) $P(2,-\frac{5}{2})$（过程略）

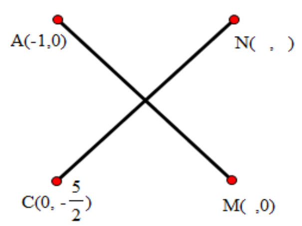
(3)按对角线分为三种情况，画出图形。

以AC为对角线

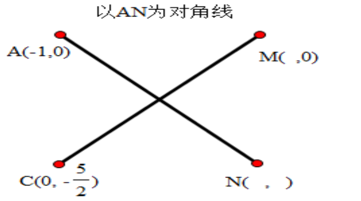


由中点坐标公式得点N的纵坐标为$-\frac{5}{2}$，代入抛物线得N（0，$-\frac{5}{2}$）或（4，$-\frac{5}{2}$）

以AM为对角线



由中点坐标公式得点N的纵坐标为$\frac{5}{2}$，代入抛物线得N（$2\pm\sqrt{14}$，$\frac{5}{2}$）



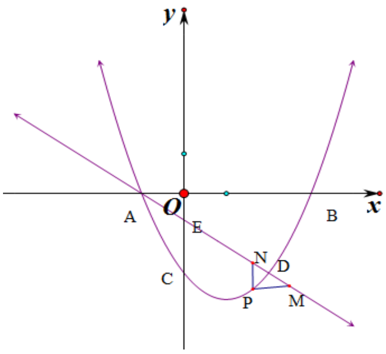
由中点坐标公式得点N的纵坐标为 $-\frac{5}{2}$，

代入抛物线得N（0，$-\frac{5}{2}$）或（4，$-\frac{5}{2}$）

综上所述，点N存在，坐标为

$$N(2,-\frac{5}{2}),N(4,-\frac{5}{2}),N(2\pm\sqrt{14},\frac{5}{2}),N(0,-\frac{5}{2})N(4,-\frac{5}{2}).$$

例2：（2017 岳阳）如图，抛物线 $y=\frac{2}{3}x^2+bx+c$ 经过点B(3,0)，C(0,-2)，直线 $l: y=-\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}$ 交y轴于点E，且与抛物线交于A、D两点，P为抛物线上一动点(不与A、D重合)。



(1)求抛物线的表达式；

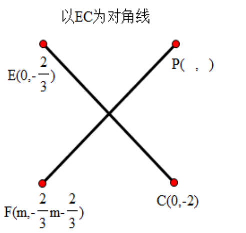
(2)当点P在直线l下方时，过点P作PM∥x轴交l于点M，PN∥y轴交l于点N，求PM+PN的最大值；

(3)设F为直线l上的点，以E、C、P、F为顶点的四边形能否构成平成四边形？若能，求出点F的坐标；若不能，请说明理由。

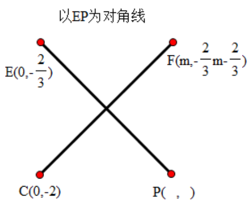
解：(1) $y=\frac{2}{3}x^2-\frac{4}{3}x-2$（过程略）

(2)当 $t=\frac{1}{2}$ 时，PM+PN最大，为 $\frac{15}{4}$.（过程略）

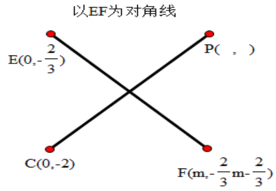
(3)设 $F(m,-\frac{2}{3}m-\frac{2}{3})$，按对角线分为三种情况，画出图形。



由中点坐标公式得P(-m,-2+$\frac{2}{3}$m)，代入抛物线得m=0(E与F重合，舍去)或m=-1，所以F（-1，0）



由中点坐标公式得P(m,-2-$\frac{2}{3}$m)，代入抛物线得m=0(E与F重合，舍去)或m=1，所以F（1，$-\frac{4}{3}$）



由中点坐标公式得P(m,$\frac{2}{3}$-$\frac{2}{3}$m)，代入抛物线得m=$\frac{1\pm\sqrt{17}}{2}$，所以F（$\frac{1+\sqrt{17}}{2}$，$\frac{-3-\sqrt{17}}{2}$），F（$\frac{1-\sqrt{17}}{2}$，$\frac{-3+\sqrt{17}}{2}$）

综上所述，点F存在，坐标为

$$F(-1,0),F(\frac{1+\sqrt{17}}{2},\frac{-3-\sqrt{17}}{3}),F(\frac{1-\sqrt{17}}{2},\frac{-3+\sqrt{17}}{3}),F(1,-\frac{4}{3}).$$

例3：如图，在平面直角坐标系中，抛物线 $y=ax^2-2ax-3a(a<0)$ 与x轴交于A、B两点，(点A在点B的左侧)，经过点A的直线l：y=kx+b与y轴负半轴交于点C，与抛物线的另一个交点为D，且CD=4AC。

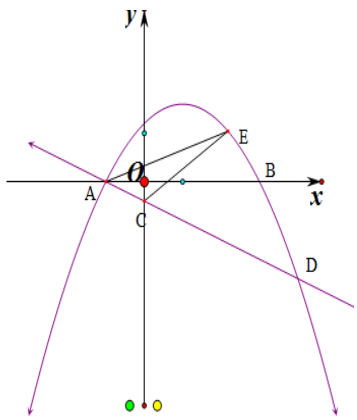
(1)直接写出点A的坐标，并求直线l的函数表达式(其中k，b用含a的式子表示)。

(2)点E是直线l上方的抛物线上的动点，若△ACE的面积的最大值为 $\frac{5}{4}$，求a的值。

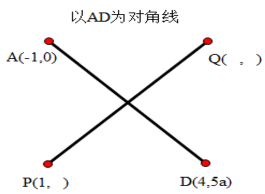
(3)设P是抛物线的对称轴上的一点，点Q在抛物线上，以点A、D、P、Q为顶点的四边形能否成为矩形？若能，求出点P的坐标；若不能，请说明理由。

解：(1)A(-1,0)，l:y=ax+a(过程略)

(2) $a=-\frac{2}{5}$（过程略）

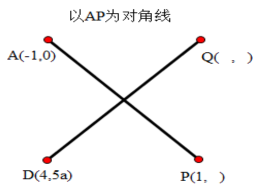


(3)按对角线分为三种情况，画出图形。



由中点坐标公式得Q点横坐标为2，代入抛物线得Q（2，-3a），再由中点坐标公式得P（1，8a）

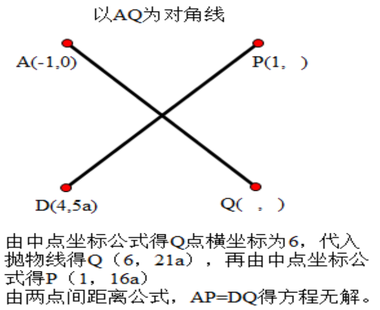
由两点间距离公式，AD=PQ得a=$\frac{1}{2}$(舍去)或a=$-\frac{1}{2}$.所以P（1，-4）.



由中点坐标公式得Q点横坐标为-4，代入抛物线得Q（-4，21a），再由中点坐标公式得P（1，26a）

由两点间距离公式，AP=DQ得a=$\frac{\sqrt{7}}{7}$(舍去)或a=$-\frac{\sqrt{7}}{7}$.所以P（1，$-\frac{26}{7}\sqrt{7}$）.

文章类型：论文|刊号（ISSN）：2630-4686

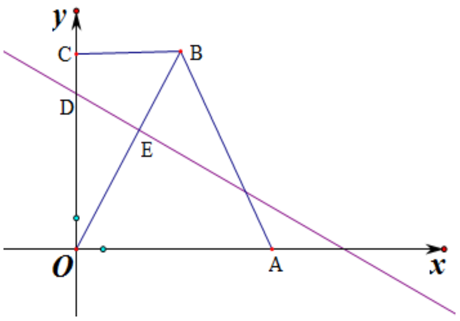


综上所述，点P存在，坐标为 $P(1,-4),P(1,-\frac{26}{7}\sqrt{7})$.

例4：在直角梯形OABC中，CB∥OA，∠COA=90°，CB=3，OA=6，BA=$3\sqrt{5}$，分别以OA，OC边所在的直线为x轴，y轴建立如图所示的平面直角坐标系。

(1)求点B的坐标；

(2)已知D、E分别为线段OC、OB上的点，OD=5，OE=2EB，直线DE交x轴于点F，求直线DE的解析式；

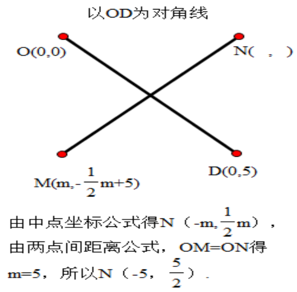


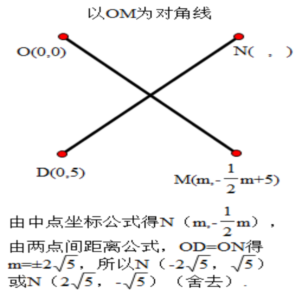
(3)点M是(2)中直线DE上的一个动点，在x轴上方的平面内是否存在另一点N，使以O、D、M、N为顶点的四边形是菱形？若存在，请求出点N的坐标；若不存在，请说明理由。

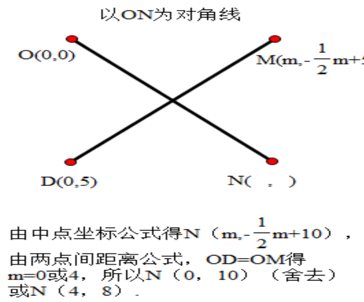
解：(1)B(3,6)(过程略)

(2)E(2,4) DE：$y=-\frac{1}{2}x+5$（过程略）

(3)设 $M(m,-\frac{1}{2}m+5)$，按对角线分为三种情况，画出图形。







综上所述，点N存在，坐标为：

$$N(-5,\frac{5}{2}),N(-2\sqrt{5},\sqrt{5}),N(4,8).$$

通过本文，不仅解决了直角坐标系中平行四边形的存在性问题，还通过归纳思考，将问题情境拓展，触类旁通，举一反三，解决了相关的矩形，菱形等特殊平行四边形的存在性问题，让学生通过解一道题学会解一类题，使学生高效学习的同时也逐渐培养学生归纳总结、拓展延伸的能力，激发学生的学习兴趣。

[参考文献]

[1]罗春林.初中数学中存在性问题解法的探讨[J].才智,2010(24):103+127.

[2]赵远刚.中考数学“存在性”问题的解题策略[J].初中生辅导,2008(15):16-21.

[3]许少华.肯定型存在性问题求解的四种策略[J].中学数学教学,2004(3):28-29.