第 4 卷◆第 11 期◆版本 1.0◆2021 年
文章类型：论文|刊号（ISSN）：2630-4686 /（中图刊号）：380GL020

n 进制中非零数字之积函数的均值公式

李博
陕西铁路工程职业技术学院
DOI:10.12238/er.v4i11.4410

[摘　要] 设 $N = a_1 n^{k_1} + a_2 n^{k_2} + \cdots + a_s n^{k_s}$ ($1 \le a_i < n$,$i = 1,2,\cdots,s$;　 $k_1 > k_2 > \cdots > k_s \ge 0$),

$a(N,n) = a_1 a_2 \cdots a_s$。本文给出了均值 $A_r(N,n) = \sum_{m<N} a^r(m,n)$ 的精确计算公式。

[关键词] n 进制；非零数字之积函数；均值
中图分类号：O156.4　文献标识码：A

The Mean Value Formula of the Product Function of N−nary Nonzero Digital Multiplication

Bo Li
Shaanxi Railway Engineering Vocational and Technical College

[Abstract]Assume $N = a_1 n^{k_1} + a_2 n^{k_2} + \cdots + a_s n^{k_s}$ ($1 \le a_i < n$, $i = 1,2,\cdots,s$;　$k_1 > k_2 > \cdots > k_s \ge 0$),

$a(N,n) = a_1 a_2 \cdots a_s$。The accurate formula for calculating the mean value has been given in this article.

$A_r(N,n) = \sum_{m<N} a^r(m,n)$.

[Key words] N−nary; nonzero digital multiplication function; mean value

1 引言及结论

1993年,美国数论专家F.Smarandache在他所箸的《ONLY PROMBLES,NOT SOLUTIONS!》一书中提出了初等数论及集合论中105个未解决的问题,其中第22问题是研究十进制中数字之积数列的性质。本文作为这一问题的一般化,讨论了n进制中非零数字之积函数均值计算问题,给出了一个精确计算公式 $A_r(N,n)$。为了叙述方便,我们先引入如下定义:

定义：设n(n≥ 2) 为一给定的整正数,对任一整正数m,假定m在n进制中表示式为:

$$m = a_1 n^{k_1} + a_2 n^{k_2} + \cdots + a_s n^{k_s}$$

其中 $1 \le a_i < n$,

$$i = 1,2,\cdots,s; \quad k_1 > k_2 > \cdots > k_s \ge 0$$

记 $a(m,n) = a_1 a_2 \cdots a_s$

并令 $A_r(N,n) = \sum_{m<N} a^r(m,n)$

r为任一自然数

为了公式简单化,记 $\varphi_r(n) = \sum_{i=1}^{n-1} i^r$ r 为自然数。

定理：设

$$N = a_1 n^{k_1} + a_2 n^{k_2} + \cdots + a_s n^{k_s}$$

其中 $a_0 = 1$, $1 \le a_i < n$,

$$i = 1,2,\cdots,s; \quad k_1 > k_2 > \cdots > k_s \ge 0;$$

r为任一自然数

则:

$$A_r(N,n) = \sum_{i=1}^{s} \left(\prod_{j=0}^{i-1} a_j^{\,r}\right)(1+\varphi_r(a_i))(1+\varphi_r(n))^{k_i} - 1$$

特别 $n = 2,\ 10$ 时,可以得出两个推论

推论1：设

$N = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \cdots + 2^{k_s}$,其中,

$k_1 > k_2 > \cdots > k_s \ge 0$ r为任一自然数

则：$A_r(N,2) = N - 1$

推论2：设

文章类型：论文|刊号（ISSN）：2630-4686 /（中图刊号）：380GL020

$$N = a_1 10^{k_1} + a_2 10^{k_2} + \cdots + a_s 10^{k_s}$$

其中 $a_0 = 1$，$1 \le a_i < 10$，

$i = 1,2,\cdots,s;\quad k_1 > k_2 > \cdots > k_s \ge 0$；

则：

$$A_1(N,10) = \sum_{i=1}^{s}\left(\prod_{j=0}^{i-1} a_j\right)(1+\varphi_1(a_i))46^{k_i} - 1$$

$$A_2(N,10) = \sum_{i=1}^{s}\left(\prod_{j=0}^{i-1} a_j^{\,2}\right)(1+\varphi_2(a_i))286^{k_i} - 1$$

2 定理的证明

为定理的证明，我们需要引入下面两个引理，首先有

引理1：设r，k为任一自然数，n为某一确定的自然数

则：$A_r(n^k,n) = (1+\varphi_r(n))^k - 1$

证明：$A_r(n^k,n) = \sum_{m<n^k} a^r(m,n)$

$$= \sum_{m<n^{k-1}} a^r(m,n) + \sum_{n^{k-1}\le m<2n^{k-1}} a^r(m,n) + \cdots + \sum_{(n-1)n^{k-1}\le m^k<n^k} a^r(m,n) \quad (1)$$

$$\because \sum_{in^{k-1}\le m<(i+1)n^{k-1}} a^r(m,n) = \sum_{0\le m<n^{k-1}} a^r(m+in^{k-1},n) \qquad i=1,2,\cdots,n\text{-}1$$

$$= a^r(in^{k-1},n) + i^r \sum_{m<n^{k-1}} a^r(m,n)$$

$$= i^r + i^r A_r(n^{k-1},n) \quad (2)$$

(2)式代入(1)

$$\therefore\ A_r(n^k,n) = A_r(n^{k-1},n) + 1^r + 2^r + \cdots + (n-1)^{r-1} + (1^r + 2^r + \cdots (n-1)^r) A_r(n^{k-1},n)$$

$$= \phi_r(n) + (1+\phi_r(n)) A_r(n^{k-1},n)$$

即

$$A_r(n^k,n) = (1+\phi_r(n)) A_r(n^{k-1},n) + \phi_r(n) \quad (3)$$

同理

$$(1+\phi_r(n)) A_r(n^{k-1},n) = (1+\phi_r(n))^2 A_r(n^{k-2},n) + \phi_r(n)(1+\phi_r(n)) \quad (4)$$

$$(1+\phi_r(n))^2 A_r(n^{k-2},n) = (1+\phi_r(n))^3 A_r(n^{k-3},n) + \phi_r(n)(1+\phi_r(n))^2 \quad (5)$$

$$(1+\phi_r(n))^{k-2} A_r(n^2,n) = (1+\phi_r(n))^{k-1} A_r(n\ \ ,n) + \phi_r(n)(1+\phi_r(n))^{k-1} \quad (6)$$

$$(1+\phi_r(n))^{k-1} A_r(n\ \ ,n) = (1+\phi_r(n))^{k-1}\phi_r(n\ \ ) \quad (7)$$

(3)+(4)+(5)+(6)+(7)得

$$A_r(n^k,n) = (1+\phi_r(n))^{k-1}\phi_r(n\ \ ) + \phi_r(n)\frac{1-(1+\phi_r(n))^{k-1}}{1-(1+\phi_r(n))}$$

$$= \phi_r(n)(1+\phi_r(n))^{k-1} + (1+\phi_r(n))^{k-1} - 1$$

$$= (1+\phi_r(n))^k - 1$$

引理2：设为任一自然数，n为某一确定的自然数

则：

$$A_r(an^k,n) = (1+\phi_r(a))(1+\phi_r(n))^k - 1$$

证明：

$$A_r(an^k,n) = \sum_{m<an^k} a^r(m,n)$$

$$= \sum_{n<n^k} a^r(m,n) + \sum_{n^k\le m<2n^k} a^r(m,n) + \cdots + \sum_{(a-1)n^k\le m<an^k} a^r(m,n) \quad (8)$$

而

$$\sum_{in^k\le m<(i+1)n^k} a^r(m,n) = \sum_{0\le m<n^k} a^r(m+in^k,n) \qquad i=1,2,\cdots a\text{-}1.$$

$$= i^r + i^r \sum_{m<n^k} a^r(m,n) \quad (1)$$

将(9)代入(8)式得

$$A_r(an^k,n) = A_r(n^k,n) + (1^r + 2^r + \cdots + (a-1)^r) A_r(n^k,n) + (1^r + 2^r + \cdots + (a-1)^r)$$

$$= A_r(n^k,n) + \phi_r(a) A_r(n^k,n) + \phi_r(a)$$

$$= (1+\phi_r(a)) A_r(n^k,n) + \phi_r(a) \quad (10)$$

由引理1(10)式得

$$A_r(an^k,n) = (1+\phi_r(a))[(1+\phi_r(n))^k - 1] + \phi_r(a)$$

$$= (1+\phi_r(a))(1+\phi_r(n))^k - 1 \quad (11)$$

有了以上两个引理，我们容易给定理的证明，事实上

$$A_r(N,n) = \sum_{m<N} a^r(m,n)$$

$$= \sum_{m<a_1n^{k_1}} a^r(m,n) + \sum_{a_1n^{k_1}\le m<a_1n^{k_1}+a_2n^{k_2}} a^r(m,n) + \sum_{a_1n^{k_1}+a_2n^{k_2}\le m<a_1n^{k_1}+a_2n^{k_2}+a_3n^{k_3}} a^r(m,n) + \cdots + \sum_{N-a_sn^{k_s}<N} a^r(m,n)$$

$$= A_r(a_1n^{k_1},n) + \sum_{0\le m<a_2n^{k_2}} a^r(m+a_1n^{k_1},n) + \sum_{0\le m<a_3n^{k_3}} a^r(m+a_1n^{k_1}+a_2n^{k_2},n) + \cdots + \sum_{0\le m<a_sn^{k_s}} a^r(m+N-a_sn^{k_s},n)$$

$$= a_0^{\,r} A_r(a_1n^{k_1},n) + a_1^{\,r} + a_1^{\,r} \sum_{m<a_2n^{k_2}} a^r(m,n) + (a_1a_2)^r + (a_1a_2)^r \sum_{m<a_3n^{k_3}} a^r(m,n) + \cdots + (a_1a_2\cdots a_{s-1})^r + (a_1a_2\cdots a_{s-1})^r$$

$$\sum_{m<a_s n^{k_s}} a^r(m,n)$$

$$=a_0{}^r A_r(a_1 n^{k_1},n)+(a_0a_1)^r A_r(a_2n^{k_2},n)$$

$$+(a_0a_1a_2)^r A_r(a_3n^{k_3},n)+\cdots$$

$$+(a_0a_1a_2\cdots a_{s-1})^r A_r(a_sn^{k_s},n)\ +$$

$$a_1{}^r+(a_1a_2)^r+\cdots+(a_1a_2\cdots a_{s-1})^r$$

$$=\sum_{i=1}^{s}(\prod_{j=0}^{i-1}a_j{}^r)A_r(a_in^{k_i},n)+\sum_{i=2}^{s}(\prod_{j=1}^{i-1}a_j{}^r) \tag{13}$$

将(11)式代入(12)式得

$$A_r(N,n)=\sum_{i=1}^{s}(\prod_{j=0}^{i-1}a_j{}^r)$$

$$\left[(1+\phi_r(a_i))(1+\phi_r(n))^{k_i}-1\right]$$

$$+\sum_{i=2}^{s}(\prod_{j=1}^{i-1}a_j{}^r)$$

$$=\sum_{i=1}^{s}(\prod_{j=0}^{i-1}a_j{}^r)(1+\phi_r(a)\ )(1+\phi_r(n))^{k_i}$$

$$-\sum_{i=1}^{s}(\prod_{j=0}^{i-1}a_j{}^r)+\sum_{i=2}^{s}(\prod_{j=1}^{i-1}a_j{}^r)$$

$$=\sum_{i=1}^{s}(\prod_{j=0}^{i-1}a_j)(1+\phi_r(a))(1+\phi_r(n))^{k_i}-1$$

[参考文献]

[1]Florentin Smarandche《ONLY PROBLEMS ,NOT SOLUTIONS!》,Xiquan ,Xiquan Publishing House 1993(fourth edition)

[2]潘承洞,潘承彪.《初等数论》,北京:北京出版社出版,1 992.

[3]R.Ayoub.Euler and the Zeta function[J].Amer,Math Monthly 1974 (81):1067-1086.

[4]N.Y.zhang and K.S.Williaws.Some Series represeution of [J].Rocky Mountain.J.Math.

[5]Hailong Li,Number Theory and Special Functions[M],Science Press,Beijing:2011”.

[6]Shigeru Kanemitsu and Haruo Tsukada, Vistas of Special Functions, World Scientific Publishing Co.Pte.Lid. 2007.

[7]Vistas of special function Ⅱ Kalyan Chakraborty shigeru. Kanemitsu Jaruo Tsukada World Scienticic 2010.

作者简介：

李博(1991--),男,汉族,陕西渭南人,理学硕士,陕西铁路工程职业技术学院基础课部教师,从事数论研究。