

关于等价无穷小量的替换定理的应用

梁海滨

辽宁对外经贸学院 通识教育学院

DOI:10.12238/er.v7i6.5177

摘要: 等价无穷小量替换是求极限的基本方法之一。论文从等价无穷小量的相关概念、定理出发, 根据它们的实质对等价无穷小量替换定理做了推广, 使学生深刻理解定理的同时也能灵活应用定理。

关键词: 无穷小量; 等价替换; 替换定理

中图分类号: G64 **文献标识码:** A

Application of Substitution Theorem on Equivalent Infinitesimal Substitution

Haibin Liang

School of Liberal Education, Liaoning University of International Business And Economics

Abstract: Equivalent infinitesimal substitution is one of the basic methods to find the limit. This paper starts from the related concepts and theorems of equivalent infinitesimal quantities, and generalizes the equivalent infinitesimal substitution theorem according to their essence, so that students can understand the theorem deeply and apply the theorem flexibly.

Keywords: Infinitesimal; Equivalent substitution; Substitution theorem

引言

极限的思想贯穿了高等数学整门课程, 其中无穷小量是极限中的一个重要概念。等价无穷小替换是求极限的基本方法之一, 等价无穷小量替换主要应用于求解极限问题, 特别是当函数中包含复杂表达式或难以直接求解的极限时。而绝大部分教材只对分子或分母的因式进行无穷小替换这一情形进行了阐述, 导致学生在使用时模糊不清, 从而影响到整个课程的学习。本文对用等价无穷小替换求极限进行思考、总结并做了推广, 为后续内容的学习奠定扎实的基础。

1 关于无穷小量

1.1 无穷小量是极限为零的量

它既不是很小的量也不是可以无限小的量。无穷小量本质上是具有这种特殊性质的函数, 不是一个具体的数。同一个自变量变化过程中的无穷小量有很多。

1.2 无穷小量与自变量的变化过程紧密相联

无穷小量是相对自变量的变化过程的, 如: 当 $x \rightarrow 0$ 时

$\sin x$ 是无穷小, 但当 $x \rightarrow \infty$ 时, 它就不再是无穷小。不能只关注函数形式不注重自变量的变化过程[1]。

2 无穷小量等价

α, β 都是在同一个变量变化过程中的无穷小量, 且

$\alpha \neq 0$, 如果 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta}{\alpha} = 1$, 称 α 与 β 等价无穷小量, 记作

$\alpha \sim \beta$ [2]。

3 关于无穷小量等价替换定理及其推广

定理1: 无穷小等价替换定理

设 $\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta'$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta'}{\alpha'}$ 存在, 则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta}{\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta'}{\alpha'} [3].$$

应用定理需要满足两个条件: 一为替换掉的变量是无穷小量, 二是这个变量是因子, 不能在加减数中进行局部替换, 若是若干个因子的乘积, 可对其中一个或若干个无穷小因子进行代换。

当 $x \rightarrow 0$ 时, 常用等价无穷小量关系:

$$\sin x \sim x \quad \tan x \sim x$$

$$\arcsin x \sim x \quad \arctan x \sim x \quad 1 - \cos x \sim \frac{1}{2} x^2$$

$$\ln(1+x) \sim x \quad e^x - 1 \sim x \quad a^x - 1 \sim x \ln a \quad (a > 0)$$

$$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x \quad (\alpha \neq 0 \text{ 是常数})$$

补充1: 多项式中的等价无穷小量关系

$$x^\alpha + x^\beta \sim x^\alpha \quad (\beta > \alpha > 0).$$

$$\text{证明: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^\alpha + x^\beta}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^{\beta-\alpha}) = 1 + 0 = 1.$$

$$\text{例1: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x + x^2}.$$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

无穷小量是多项式时, 高次项远远小于低次项, 因此起

决定作用是它们的最低次项,即矛盾的主要方面,而其他较高次项相对来说就是次要矛盾,是干扰项,可以忽略不计。

而根据泰勒公式,具有直到 $n+1$ 阶导数的函数在一个点的邻域内的值可以用函数在该点的函数值及各阶导数值组成的 n 次多项式近似表达。这样,不局限于因子,无穷小和式也可以应用泰勒公式进行等价替换。

例2:求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} + 2\cos x - 3}{x^4}$ 。

解

$$\because e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{1}{2!}x^4 + o(x^4), \quad \cos x$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4),$$

$$\therefore e^{x^2} + 2\cos x - 3 = \left(\frac{1}{2!} + 2 \cdot \frac{1}{4!}\right)x^4 + o(x^4),$$

从而

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} + 2\cos x - 3}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{7}{12}x^4 + o(x^4)}{x^4} = \frac{7}{12}.$$

例3:求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \tan 5x + \arcsin 7x + e^x - \cos 2x}{\sqrt{1+x} - \cos 5x + \arctan 4x + \sin x^2}$

解

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \tan 5x + \arcsin 7x + e^x - \cos 2x}{\sqrt{1+x} - \cos 5x + \arctan 4x + \sin x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - 5x + 7x + x - x^2}{\frac{1}{2}x - \left(\frac{5x}{2}\right)^2 + 4x + x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - 5x + 7x + x}{\frac{1}{2}x + 4x} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

注1: 等价无穷小量关系中的 x 可以是自变量变化过程中的任意无穷小量 $\phi(x)$ 。

注2: 等价无穷小量代换能简便极限计算的原因就是在于等价无穷小代换能够将较为复杂的函数(三角函数、反三角函数、对数类函数、指数类函数和幂类函数等)通过等价无穷小代换转为简单函数 x (或者 x^α)从而使极限计算简单。化,反映了数学的“复杂问题简单化”思想。

注3: 应用泰勒公式等价替换和式时,要注意各个函数展开式要展到代数和不为零的那一项。

例4: 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 2x}$ 。

错解 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\tan x \sim x, \sin x \sim x$,

$$\therefore \text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x}{(2x)^3} = 0.$$

错误原因 $\tan x - \sin x$ 不是因子,而做为和式应用泰

勒公式展开替代时代数和为0

正解1 当 $x \rightarrow 0$ 时,

$$\sin 2x \sim 2x, \quad \tan x - \sin x = \tan x(1 - \cos x)$$

$$\sim \frac{1}{2}x^3,$$

$$\text{故} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^3}{(2x)^3} = \frac{1}{16}.$$

正解2

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \frac{1}{3}x^3 - (x - \frac{1}{6}x^3)}{(2x)^3} = \frac{1}{16}.$$

定理2(推广1): 等价无穷小替换与极限四则运算法则

设 $\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta', \lim \phi(x)$ 存在且不等于0,

$$\lim \frac{\beta'}{\alpha'} \text{ 存在, 则 } \lim \frac{\beta}{\alpha} \phi(x) = \lim \frac{\beta'}{\alpha'} \lim \phi(x).$$

注1: $\phi(x)$ 可以推广到有限个

注2: 极限不是0的因子可以先计算极限

$$\text{例5: 求 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - x^2}.$$

解

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x}(e^{x-\sin x} - 1)}{x(1-x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x}}{1-x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x} = 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{\sin x}{x}\right) = 0.$$

另

解

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - (e^{\sin x} - 1)}{x - x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - (x - \frac{1}{6}x^3)}{x} = 0.$$

定理3(推广2): 复合函数的等价无穷小替换[4]。

设 $y = f(u)$ 与 $u = \phi(x)$ 构成复合函数

$$y = f(\phi(x)), \quad \lim_{u \rightarrow 0} f(u) \text{ 存在或为 } \infty, \text{ 则当}$$

$$\phi(x) \sim h(x) \text{ 时, 有 } \lim_{x \rightarrow 0} f(\phi(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} f(h(x)) \text{ 成立.}$$

注: 复合函数等价替换告诉我们,如果中间变量 u 是无穷小量,而整个函数的极限为存在或为 ∞ 时,那么中间变量可以等价替换。

$$\text{例6: 求 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin 7x}{\ln \tan 5x}.$$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin 7x}{\ln \tan 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln 7x}{\ln 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{7x}{5}}{\frac{5x}{5}} = 1.$$

推论1 (推广3): 幂指函数的等价无穷小替换

因为 $[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$, 所以幂指函数可以看作复合函数, 根据定理3, 先利用等价无穷小量替换法, 简化原函数, 把指数和底进行等价替换, 再把函数变成以e为底的指数函数, 最后用洛必达法则求极限。

例7: 求 $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^{\tan x}$.

解

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^x = e^{\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}} = e^0 = 1.$$

推论2 (推广4): 变限函数的上(下)限等价无穷小替换

因为 $\int_a^{\phi(x)} f(t) dt$ 可以看作复合函数, 中间变量

$u = \phi(x)$, 若 $\phi(x) \sim h(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0} \int_a^{h(x)} f(t) dt$ 存在或为

∞ , 根据定理3, $\lim_{x \rightarrow 0} \int_a^{\phi(x)} f(t) dt = \lim_{x \rightarrow 0} \int_a^{h(x)} f(t) dt$.

$$\text{例8: 求 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\tan^2 x} (2^t - 1) dt}{\sqrt{1 + 3x^4} - 1}.$$

解

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\tan^2 x} (2^t - 1) dt}{\sqrt{1 + 3x^4} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} (2^t - 1) dt}{\frac{3}{2} x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2^{x^2} - 1) \cdot 2x}{6x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \ln 2}{3x^2} = \frac{\ln 2}{3}$$

定理4(推广5): 变限函数的被积函数的等价无穷小替换

设 $\alpha \sim \alpha'$, 则有 $\int_0^x \alpha(t) dt \sim \int_0^x \alpha'(t) dt$

$$\text{证明: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \alpha(t) dt}{\int_0^x \alpha'(t) dt} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{\alpha'(x)} = 1$$

例7也可以这么做:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\tan^2 x} (2^t - 1) dt}{\sqrt{1 + 3x^4} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} t \ln 2 dt}{\frac{3}{2} x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \ln 2 \cdot 2x}{6x^3} = \frac{\ln 2}{3}$$

定理5: 等价替换定理在级数敛散性判别中的应用^[5].

当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\alpha(n)$ 与 $\alpha'(n)$ 是同号无穷小, 且

$\alpha \sim \alpha'$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha(n)$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha'(n)$ 有相同的敛散性。

例9: 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$ 的敛散性

解 由于当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\sin \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$,

又因为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$ 发散。

补充2: 利用无穷小与无穷大关系得到的等价关系式

在同一变化过程中, 无穷大的倒数是无穷小; 对数函数

$\ln x$ 、幂函数 x^α 、指数函数 $e^{\lambda x} (\lambda > 0)$ 均为当 $x \rightarrow +\infty$ 时

的无穷大, 但它们增大的速度很不一样, 幂函数增大的速度远比对数函数快, 而指数函数增大的速度又远比幂函数快, 对于幂函数, 较高指数的幂函数增大的速度远大于较低指数的幂函数。则

当 $x \rightarrow +\infty$ 时

$$\frac{1}{\ln x + x^\alpha} \sim \frac{1}{x^\alpha} (\alpha > 0), \quad \frac{1}{e^{\lambda x} + x^\alpha} \sim \frac{1}{x^\alpha} (\alpha > 0), \quad \frac{1}{x^\alpha + x^\beta} \sim \frac{1}{x^\alpha} (\alpha > \beta > 0)$$

例10: 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(n^2+1)}{\sqrt{n+1}(n^4-n)}$ 的敛散性

解 由补充2可知当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\frac{(n+1)(n^2+1)}{\sqrt{n+1}(n^4-n)} \sim \frac{n \cdot n^2}{n^{\frac{1}{2}} \cdot n^4} \sim \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

又因为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(n^2+1)}{\sqrt{n+1}(n^4-n)}$ 收敛。

4 结语

无穷小等价替换定理是微积分中的一个重要工具, 它可以帮助我们简化复杂的极限计算, 定理不局限于因子的替换, 它可以推广到加减替换、复合函数替换、变限函数替换等, 该定理在无穷级数敛散性判别中也起着重要作用。但是在使用这个定理时, 我们需要仔细检查替换的条件是否满足, 以避免出现错误。

参考文献:

- [1] 杨建奇. “无穷小量及其性质”的教学探讨[J]. 高等数学研究, 2023, 26(5): 51-53.
- [2] 同济大学应用数学系. 高等数学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2014.
- [3] 吴赣昌. 经济数学[M]. 中国: 中国人民大学出版社, 2011.
- [4] 杨子兰, 李睿, 杨惠娟. 等价无穷小量替换法在复合函数极限中的应用[J]. 湘南学院学报, 2018, 39(5): 16-18.
- [5] 同济大学数学系. 高等数学附册学习辅导与习题选解[M]. 北京: 高等教育出版社, 2017.